17. 2. 2023

UVOD

če f konst.:
$f=0 \Rightarrow V(f) = \mathbb{C}^2$
$f=1 \Rightarrow V(f) = \emptyset$

Def: Algebraična krivulja je množica ničel nekonstantnega polinoma v dveh spremenljivkah.

Kje ležijo koeficienti? v polju. $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$
Kje ležijo ničle? v polju K, ki vsebuje F $(\mathbb{Q}^2, \mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)$ Pri nas $K=F=\mathbb{C}$

F polje, $F[x,y] = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x^i y^j \;\middle|\; c_{i,j} \in F, \; m,n \in \mathbb{N} \right\}$

?K – iz polja K

Množica ničel polinoma $f \in F[x,y]$ je $V_K(F) = \{(a,b) \mid f(a,b) = 0\}$

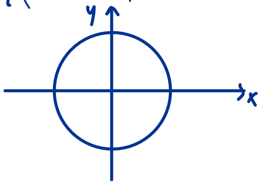
Alg. krivulje so mn. oblike $V_{\mathbb{C}}(f)$, za nek $f \in \mathbb{C}[x,y]$, f nekonstanten

Primer: $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \in \mathbb{Q}[x,y]$

$V_{\mathbb{Q}}(f) = \left\{ \left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}, \frac{2mn}{m^2+n^2} \right) \;\middle|\; m,n \in \mathbb{Z}, \text{ ne obe nič} \right\}$ Pitagorejske trojice

$\left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)^2 + \left(\frac{2mn}{m^2+n^2}\right)^2 = \frac{m^4 - 2m^2n^2 + n^2 + 4m^2n^2}{(m^2+n^2)^2} = \frac{m^4 + 2m^2n^2 + n^2}{m^4 + 2m^2n^2 + n^2} = 1$

$V_{\mathbb{R}}(f) =$



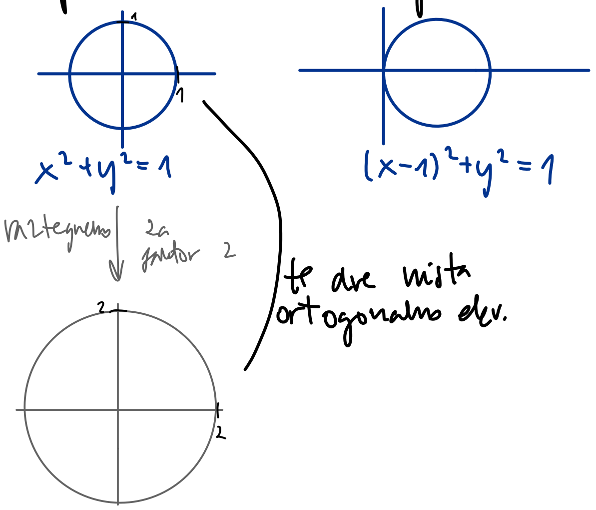
$V_{\mathbb{C}}(f) = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 \mid a^2 + b^2 = 1\}$

npr. $a = 100i$ $\quad -10\,000 + b^2 = 1$
$b = \sqrt{10001}$

Ta množica ni omejena. (prej smo dobili krog – omejen, v kompleksnem pa dobiš neomejeno krivuljo)

Opomba: V kompleksnem primeru ni posebne razlike med elipsami in hiperbolami
hiperbolo $x^2 - y^2 = 1$ pretvorimo v elipso $x^2 + (iy)^2 = 1$

Kdaj sta dve krivulji ekvivalentni?



Pri linearni alg. smo klasificirali krivulje
$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$
do ortogonalne ekvivalence
(premik + vrtež + zrcaljenje)
elipse, hiperbole, parabole, (pari) premic

Nas bo zanimala afina ekvivalenca krivulj. (krivulji enaki <=> afino ekvivalentni)

Preslikava $\phi : V \longrightarrow V$ je afina, če je oblike $\phi(v) = \underbrace{Lv}_{\text{lin. preslikava}} + \underbrace{t}_{\text{vektor}}$ (kompozitum translacije in linearne preslikave)

vekt. pr.

$$\begin{tikzcd} \phi: \mathbb{C}^2 \arrow[r] & \mathbb{C}^2 \end{tikzcd}$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} ax+by+e \\ cx+dy+f \end{bmatrix}$$

$(x,y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Kompozitum dveh afinih preslikav je spet afina preslikava.

Dokaz: $\phi_1(v) = L_1 v + t_1 \quad \phi_2(v) = L_2 v + t_2$

$(\phi_2 \circ \phi_1)(v) = \phi_2(\phi_1(v)) = \phi_2(L_1 v + t_1) = L_2(L_1 v + t_1) + t_2 =$
$= \underbrace{L_2 L_1}_{\text{lin. presl.}} v + \underbrace{L_2 t_1 + t_2}_{\text{premik}}$

iščemo → $\phi_2 \circ \phi_1 = id$ ← podano

[illegible] $\begin{cases} L_2 L_1 = id = I_2 & (1) \\ L_2 t_1 + t_2 = 0 & (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow L_2 = L_1^{-1}$

$(2) \Rightarrow t_2 = -L_1^{-1} t_1$

Afina transformacija je obrnljiva afina preslikava. (bijektivna afin. pres.) njen inverz spet afine

To velja, če je L obrnljiva $\left(\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0\right)$

Trditev: Afina transformacija preslika algebraično krivuljo v algebraično krivuljo.

Dokaz: Naj bo $\mathcal{C}$ neka alg. krivulja, recimo $\mathcal{C} = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 \mid f(a,b) = 0\}$, in naj bo
$\overset{\mathbb{C}[x,y]}{\Uparrow}$

$\phi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ afina preslikava // transformacija ?

Kaj je $\phi(\mathcal{C})$?

$$\phi(\mathcal{C}) = \{\phi(a,b) \mid f(a,b) = 0\}$$

$Id = \phi^{-1} \circ \phi$

$$= \{\phi(a,b) \mid (f \circ \phi^{-1})(\phi(a,b)) = 0\}$$

$$= \{\phi(a,b) \mid (f \circ \phi^{-1})(c,d) = 0\}$$

ϕ afina $\Rightarrow$ ϕ^{-1} afina $\Rightarrow$ $f \circ \phi^{-1}$ je spet polinom

$$\mathcal{C} = V(f) \Rightarrow \phi(\mathcal{C}) = V(f \circ \phi^{-1})$$

Def. Dve krivulji sta afino ekvivalentni, če obstaja afina transformacija, ki eno preslika v drugo.

Primer afine ekvivalence: Zakaj je elipsa $\underbrace{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1}_{f(x,y)}$ $/\!/ \ \mathcal{C}$ ekvivalentna krogu $x^2+y^2=1$?

$\phi\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \phi(x,y) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = (x', y') \Longrightarrow (x,y) = (ax', by')$

Ko slikamo množice, slikamo s ϕ.
Ko slikamo polinome, slikamo s ϕ^{-1}

Kaj je ϕ^{-1}?

$\phi^{-1}(x,y) = (ax, by) \Rightarrow (f \circ \phi^{-1})(x,y) = f(ax, by) = x^2 + y^2 - 1$

$\phi(\mathcal{C}) = \phi(V(f)) = V(f \circ \phi^{-1}) = V(x^2 + y^2 - 1)$ = enotska krožnica

(iz istih razlogov je hiperbola ekvivalentna krožnici)

1) Vsaka premica je afino ekvivalentna osi x.

2) Vsaka krivulja 2. stopnje ~~potem~~ je $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ ekvivalentna krivulji oblike $y^2 = Ax^2 + Bx + C$

- $c \neq 0 \Rightarrow$

BŠS $c=1$: (če $c \neq 1$, delimo s c)

$$ax^2 + 2bxy + y^2 + dx + ey + f = y^2 + (2bx+e)y + ax^2 + dx + f + \underbrace{(2bx+e)^2 - (2bx+e)^2}_{\text{vrinemo}} = 0$$

$$(y + 2bx + e)^2 = Ax^2 + Bx + C$$

$\phi(x,y) = (x, y + 2bx + e)$ preslika 🟪 v 🟩

- $c = 0$: lahko z afino transformacijo dosežemo, da je $c \neq 0$ (pod pogojem, da je vsaj en od $a, b, c \neq 0$)
  - če $a \neq 0$: zamenjamo x in y
  - če $a, c = 0$, vzamemo vrtež za 45°:

$x \longrightarrow x + y$

$y \longrightarrow x - y$

Primer: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\qquad \phi(x,y) = (y, x)$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Afine algebraične množice in njihove enačbe

Uvod v: STUDYJEVA LEMA (= nullstellensatz)

vemo, da polinom določa krivuljo, v kakšni meri pa krivulja določa polinom?

Glavno vprašanje: V kolikšni meri alg. krivulja določa svoj polinom?
$V(x) = V(2x) = V(x^2) \dots$ krivulja ne določa enolično svojega polinoma

Lema: $V(fg) = V(f) \cup V(g)$

Dokaz: $(a,b) \in V(fg) \iff (fg)(a,b) = 0$
$\iff f(a,b)\, g(a,b) = 0$
$\iff f(a,b) = 0$ ali $g(a,b) = 0$
$(a,b) \in V(f)$ ali $(a,b) \in V(g)$

(unija dveh alg. krivulj je spet alg. krivulja)

$V(cf) = V(f)$ c neničelna konstanta $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
$V(f^n) = V(f)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Kaj vemo o kolobarju $\mathbb{C}[x,y]$? cel kolobar, ima enolično faktorizacijo ($f \cdot g = 0 \Rightarrow f = 0$ ali $g = 0$)
- nima deliteljev niča (UFD – unique factorization domain)
- imamo razcep na prafaktorje (nerazcepne polinome)
- nimamo izreka o deljenju z ostankom (ni evklidskega alg.) (torej ni niti evklidski niti glavni kolobar)

Polinom je razcepen, če ga lahko zapišemo kot produkt dveh nekonst. polinomov.

Enoličnost do (neničelnega) konst. faktorja

$$f = \underset{\substack{\neq\\ 0\\ \text{konst.}}}{c}\, g_1^{m_1} \cdots g_k^{m_k} = \underset{\substack{\neq\\ 0\\ \text{konst.}}}{d}\, h_1^{n_1} \cdots h_\ell^{n_\ell}$$ g, h nerazcepni

$g_1, \dots, g_k$ so ravno $h_1, \dots, h_\ell$ do vrstnega reda in do konst. fakt. natančno.

Razcepimo polinom f na nerazcepne faktorje

$f = c f_1^{m_1} \cdots f_k^{m_k}$ f_i nerazcepni, ne konst.
c neničeln, konstanten

$$\mathcal{C} = V(f) = V(f_1^{m_1} \cdots f_k^{m_k}) \overset{\text{lema}}{=} V(f_1^{m_1}) \cup \dots \cup V(f_k^{m_k}) = \underbrace{V(f_1)}_{\text{nerazcepna}} \cup \dots \cup V(f_k) \overset{\text{lema}}{=} V(\underbrace{f_1 \cdots f_k}_{\text{minimalni polinom krivulje } V(F)})$$

eksistenca sledi iz UFD, enoličnost iz Studyja

Def: Algebraična množica je nerazcepna, če je enaka množici ničel kakega nerazcepnega polinoma.

Def: Podmnožica $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}^2$ je nerazcepna afina algebraična množica, če obstaja tak nerazcepen nekonstanten polinom $f \in \mathbb{C}[x,y]$, da velja $\mathcal{C} = V(f)$.

Vsaka krivulja do konst. faktorja natanko določa svoj minimalni polinom.

Izkazalo se bo, da afina algebraična množica enolično (do konst. faktorja natančno) določa nerazcepne faktorje svojega polinoma

Opazimo: $f | g \Rightarrow V(f) \subseteq V(g)$

$f | g \Rightarrow g = kf$

$(a,b) \in V(f) \Rightarrow f(a,b) = 0 \Rightarrow k(a,b)\, f(a,b) = 0 \Rightarrow g(a,b) = 0 \Rightarrow (a,b) \in V(g)$

V splošnem ne velja obrat te trditve. (velja pa delni obrat te trditve = Studyjeva lema)

Studyjeva lema: Če je f nekonstanten in nerazcepen in če $V(f) \subseteq V(g)$, potem $f | g$ $f, g \in \mathbb{C}[x,y]$

Posledica: f nekonstanten $\Rightarrow V(f) \neq \emptyset$ (= Vsaka afina algebraična krivulja je neprazna)

Dokaz: Recimo, da je $V(f) = \emptyset$ in da je g nerazcepen faktor od f

Potem $g | f \Rightarrow V(g) \subseteq V(f) = \emptyset \Rightarrow V(g) = \emptyset$

Torej je za $\forall \underset{\mathbb{C}[x,y]}{\underset{\in}{h}}$: $V(g) \subseteq V(h) \xrightarrow{Study} g | h$ za $\forall h$ ✗ $\overset{npr.}{h} = g+1$ protislovje

g deli vse nekonstantne pol. v $\mathbb{C}[x,y]$

24. 2. 2023

Posledica: Če je $V(f) \subseteq V(g)$, potem so nerazcepni faktorji f podmnožica nerazcepnih faktorjev od g.
(Če $V(f) = V(g)$, potem imata f in g iste nerazcepne faktorje)

Dokaz: Recimo, da je h nerazcepen faktor od f.

$$\left.\begin{array}{l} h | f \Rightarrow V(h) \subseteq V(f) \\ \text{predpostavka: } V(f) \subseteq V(g) \end{array}\right\} \Rightarrow V(h) \subseteq V(g) \xrightarrow{Study} h | g \Rightarrow h \text{ je nerazcepen faktor} \quad \square$$

Def. Krivulja C je stopnje n, če je njen min. pol. st. n.

PRIPRAVE NA DOKAZ STUDYJEVE LEME

Povzetek: Definirali bomo rezultanto dveh polinomov in dokazali, da je rezultanta 0 $\Leftrightarrow$ polinoma imata skupen nekonstanten faktor.

Imamo dva polinoma iz $A[x]$, kjer je A kolobar $\mathbb{C}[x,y] = \underbrace{\mathbb{C}[y]}_{A}[x]$

$$f = \underset{0}{\underset{\neq}{a_0}} x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$$

$$g = \underset{0}{\underset{\neq}{b_0}} x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n$$

Rezultanta polinomov f in g je

$$\det = \begin{array}{cccccccc|l}
x^{m+n-1} & & & & x^{n-1} & x^{n-2} & \overbrace{\qquad\qquad}^{n-1 \text{ ničel}} & x^{0} & \\
a_0 & a_1 & & \ldots & a_m & 0 & \ldots & 0 & \\
0 & a_0 & a_1 & \ldots & & a_m & \ldots & 0 & \Big\}\, n \\
\vdots & & & & & & & & \\
0 & \ldots & 0 & a_0 & a_1 & & \ldots & a_m & \\
b_0 & b_1 & & \ldots & b_n & 0 & \ldots & 0 & \\
0 & b_0 & & \ldots & & b_n & \ldots & 0 & \Big\}\, m \\
\vdots & & & & & & & & \\
0 & & \ldots & b_0 & b_1 & & \ldots & b_n &
\end{array}$$

To je element A.
Oznaka: $R_{f,g}$

$\det = 0 \Leftrightarrow$ vrstice neodvisne

VELJA SAMO NAD POLJI! $\mathbb{C}[x,y]$ NI POLJE JE PA CEL KOLOBAR ZATO GA LAHKO VLOŽIMO V POLJE.

Izrek: Naj bosta $f, g \in \underbrace{\mathbb{C}[x,y]}_{\overbrace{\mathbb{C}[y]}^{A}[x]}$. Naslednje trditve so ekvivalentne.

$f = a_0 x^m + \ldots + a_m$

$g = b_0 x^n + \ldots + b_m$

(1) $R_{f,g} = 0$

(2) Obstajata taka polinoma $\underbrace{\varphi, \psi}_{\text{nista oba nič}}$, da je $\varphi f + \psi g = 0$ in $\deg \varphi < \deg g$ in $\deg \psi < \deg f$

(3) f in g imata skupen nekonstanten faktor.

Dokaz: (1) $\Leftrightarrow$ (2): vrstice $R_{f,g}$ so linearno odvisne nad $\overset{\text{polje}}{A}$ (najprej nad poljem ulomkov od A)

Vrstice lahko identificiramo s polinomi: glej det

$1.$ vrstica $\longleftrightarrow a_0 x^{m+n-1} + a_1 x^{m+n-2} + \ldots + a_m x^{n-1}$ $\quad / \cdot \alpha_1$

$2.$ vrstica $\longleftrightarrow a_0 x^{m+n-2} + a_1 x^{m+n-3} + \ldots + a_m x^{n-2}$ $\quad / \cdot \alpha_2$

$\vdots$

n-ta vrstica $\longleftrightarrow a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$ $\quad / \cdot \alpha_n$

$n+1$ vrstica $\longleftrightarrow b_0 x^{m+n-1} + b_1 x^{m+n-2} + \ldots + b_n x^{n-1}$ $\quad / \cdot \beta_1$

$\vdots$

$n+m$ vrstica $\longleftrightarrow b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n$ $\quad / \cdot \beta_m$

Obstajajo taki α_i, β_j, da je:

$$0 = \alpha_1 (a_0 x^{m+n-1} + a_1 x^{m+n-2} + \ldots + a_m x^{n-1}) + \ldots + \alpha_n (a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m) +$$
$$+ \beta_1 (b_0 x^{m+n-1} + b_1 x^{m+n-2} + \ldots + b_n x^{n-1}) + \ldots + \beta_n (b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n) =$$
$$= \alpha_1 x^{n-1} f + \ldots + \alpha_n f +$$
$$\beta_1 x^{m-1} g + \ldots + \beta_n g =$$

$$= (\alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_n) f + (\beta_1 x^{m-1} + \ldots + \beta_m) g =$$
$$= \varphi f + \psi g \qquad \deg \varphi \leq n-1, \quad \deg \psi \leq m-1$$

φ in ψ nista oba nič

(3) <=> (2)

3 => 2: Recimo, da imata f in g skupen nekonstanten nerazcepen faktor h

$\Rightarrow f = f_1 h, \quad g = g_1 h$ za neka f_1, g_1

$\Rightarrow g_1 f = f_1 h g_1 = f_1 g$

$\Rightarrow \underbrace{g_1 f}_{\varphi} + \underbrace{(-f_1) g}_{\psi} = 0$

$g_1 \cdot f = \frac{g}{h} \cdot f_1 \cdot h = g \cdot f_1$

$\deg \varphi = \deg g_1 < \deg g$

$\deg \psi = \deg f_1 < \deg f$

2 => 3: $\varphi f + \psi g = 0$

$\Rightarrow \varphi f = (-\psi) g$

Če sta f in g tuja $\Rightarrow g | \varphi$ in $f | \psi$

$\Rightarrow \deg g \le \deg \varphi \qquad \deg f \le \deg \psi$

$-\!\!\times\!\!-\ \deg \varphi < \deg g \qquad -\!\!\times\!\!-\ \deg \varphi < \deg f$

Torej f in g nista tuja $\Rightarrow$ (3)

DOKAZ STUDYJEVE LEME

Izrek: $V(f) \subseteq V(g)$ in f nekonstanten, nerazcepen $\Rightarrow f | g$

Dokaz: $f, g \in \mathbb{C}[x,y]$

$f = a_0 x^n + \dots + a_m \qquad a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}[y]$

$g = b_0 x^n + \dots + b_n \qquad b_0, \dots, b_n \in \mathbb{C}[y]$

f nekonstanten po predpostavki $\overset{?}{\Longrightarrow} m \geq 1$

(primer: $f = y$ je nekonstanten v $\mathbb{C}[x,y]$ ampak konstanten v $A[x]$) $\quad A \overset{\shortparallel}{=} \mathbb{C}[y]$

$\leadsto$ z morebitno zamenjavo spremenljivk (x in y) dosežemo, da je $m \geq 1$.

Ker je $a_0 \neq 0$, obstaja tak $y_0 \in \mathbb{C}$, da velja $a_0(y_0) \neq 0$

Oglejmo si polinoma:

$f_{y_0}(x) = f(x, y_0) = a_0(y_0) x^m + \dots + a_m(y_0) \in \mathbb{C}[x]$

$g_{y_0}(x) = g(x, y_0) = b_0(y_0) x^n + \dots + b_n(y_0) \in \mathbb{C}[x]$

Trdimo, da imata ta dva polinoma skupen nekonstanten faktor.

Ker je $a_0(y_0) \neq 0$ in $m \neq 1$ je f_{y_0} nekonstanten polinom v $\mathbb{C}[x]$

Zato ima po osnovnem izreku algebre vsaj eno ničlo, recimo c.

$0 = f_{y_0}(c) \overset{\text{po}}{=} f(c, y_0)$

Upoštevamo, da je $V(f) \subseteq V(g)$ po predpostavki:

Torej $0 = g(c, y_0) = g_{y_0}(c)$

Torej je $x - c$ skupen faktor od f_{y_0} in g_{y_0}.

Uporabimo izrek o rezultanti $(f, g \in A(x))$ $\quad A \overset{\shortparallel}{=} \mathbb{C}$

Dobimo $R_{f_{y_0}, g_{y_0}} = 0$ za $\forall y_0$, ki zadoščajo $g(y_0) \neq 0$.

$$\shortparallel$$

$$\det \begin{bmatrix} a_0(y_0) \dots a_m(y_0) \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_0(y) \dots a_m(y) \\ \\ \\ \end{bmatrix} \Bigg|_{y=y_0} = R_{f,g} \Big|_{y=y_0}$$

Rezultanta $R_{f,g}$ je polinom v y, ki ima ničlo v vsakem y_0, ki zadošča $a_0(y_0) \neq 0$.

Torej ima $\overset{\text{polinom}}{\downarrow}$ $R_{f,g}$ neskončno ničel in je zato identično enak 0.

Spet uporabimo izrek o rezultanti. Dobimo, da imata f in g skupen nekonstanten faktor v $A[X]$

↳ tokrat za $A = \mathbb{C}[y]$

Ker je f nerazcepen, odtod sledi, da $f \mid g$. □

↑ po predpostavki

↳ torej je skupen nekonstanten faktor f in g enak f

PROJEKTIVNO ZAPRTJE

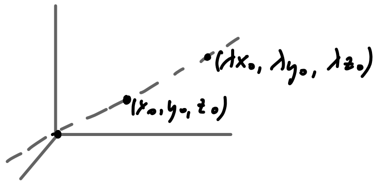
Bistvo: Bezoutov izrek

Def.: PROJEKTIVNA RAVNINA

Naj bo K polje (npr. $K=\mathbb{C}$).

Afina ravnina $=K^2:=\{(a,b)\mid a,b\in K\}$

Projektivna ravnina $\overset{def}{=}$ $\underbrace{\text{vse premice v } K^3}_{=\text{projektivne točke}}$, ki gredo skozi izhodišče.



samo razmerja so pomembna

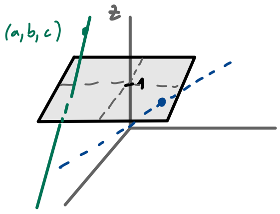
Projektivne koordinate projektne točke so $[x_0 : y_0 : z_0]$

Kako si projektivno ravnino predstavljamo v 2D?

1. metoda: Identificiraš nasproti ležeče točke na enotski sferi (topologija) deluje za $K=\mathbb{R}$ (vsaka premica skozi izhodišče določa dve antipodni točki na sferi)

2. metoda: Narišeš ravnino $z=1$ in gledaš preseke premic s to ravnino.

afini model, deluje za $\forall K$

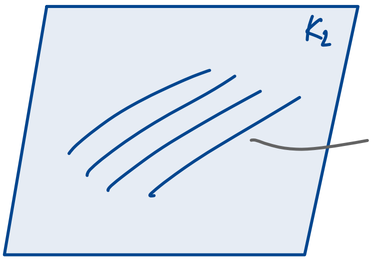


$[a:b:c] \underset{z=1}{\overset{\text{premik}}{\rightleftharpoons}} [\frac{a}{c} : \frac{b}{c} : 1] \longrightarrow (\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$

Točka $[x_0 : y_0 : z_0]$ seka ravnino $z=1$ v točki $(\underbrace{\frac{x_0}{z_0}, \frac{y_0}{z_0}}_{\text{afine koordinate}}, 1)$

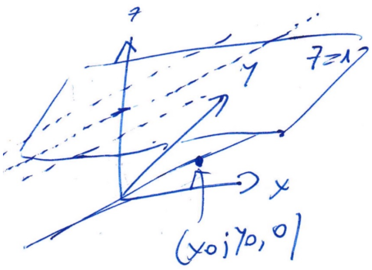
Problem: premice, ki so vzporedne z ravnino $z=1$.
Tem premicam rečemo točke v neskončnosti in jih moramo dodati k afini ravnini $z=1$.

proj. ravnina:



k šop vzporednih premic določi eno točko v neskončnosti

Šop vzporednih premic v afini ravnini je projektivna točka vzporedna z afino ravnino.



Torej povzetek: $P_2(K)$ = afine točke $\cup$ točke v ∞

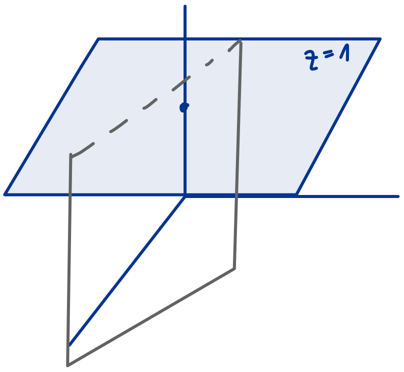
3. 3. 2023

PROJEKTIVNE PREMICE

Predstavljamo si jih kot ravnine v K^3, ki gredo skozi izhodišče.

Enačba projektivne premice = enačba ravnine skozi izhodišče
$ax+by+cz=0$, kjer a, b, c niso vsi 0
$\vec{n}=(a,b,c)$ je normala na ravnino

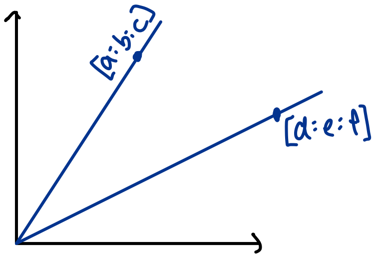
Kako si predstavljamo projektivne premice v 2D?
sferično: to so glavni krogi enotske sfere



Kako iz projektivne premice dobimo premico v z=1?
Sekamo ravnino v K^3, ki gre skozi izhodišče z ravnino z=1

Projektivna premica z=0 ne seka afine ravnine z=1
= projektivna premica v neskončnosti.

Projektivna premica, ki gre skozi dani projektivni točki [a : b : c] in [d : e : f]...



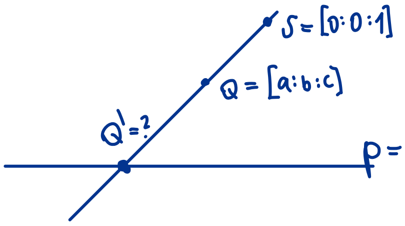
Katere točke so koplanarne s temi dvemi proj. točkami ~~premicami~~?
mešani prod. mora bit =0

...ima enačbo $\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{bmatrix}=0$

Presek dveh premic v projektivni ravnini
$ax+by+cz=0$ $\qquad$ $dx+cy+fz=0$
vektorsko zmnožimo normali (a, b, c) in (d, e, f).

PRIMER UPORABE

Projekcija iz točke na premico



Q' je projekcija Q (iz S na p)

Enačba premice skozi S in Q.

$$0=\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{bmatrix}=ay-xb$$

To premico sekamo s premico z=0.
$(-b,a,0)\times(0,0,1)$
$\underline{\underline{Q'=[a:b:0]}}$

PROJEKTIVNE ALGEBRAIČNE KRIVULJE

Def.
Polinom $F \in \mathbb{C}[x,y,z]$ je homogen, če so vsi njegovi monomi iste stopnje.

npr $x^2y^4+x^6+xy^5$ je homogen. stopnje 6

Opomba: Za vsak homogeni polinom stopnje d velja
$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d F(x,y,z)$ za $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

- lahko bi uzeli tudi to za def.

Oznake: F, G, H homogeni polinomi v x, y, z.
f, g, h polinomi v x, y

Def.: Projektivna točka $[a:b:c]$ je ničla homogenega polinoma $F(x,y,z)$, če velja $F(a,b,c)=0$

Zakaj je to dobro definirano

$$[a:b:c]=[d:e:f] \not\Rightarrow F(a,b,c)=F(d,e,f)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \not\Uparrow$$

$$\exists \lambda \neq 0.\ d=\lambda a,\ e=\lambda b,\ f=\lambda c \implies F(d,e,f)=\lambda^{\deg F} F(a,b,c)$$

če $[a:b:c]$ ničla F, potem je tudi $[d:e:f]$ ničla F.

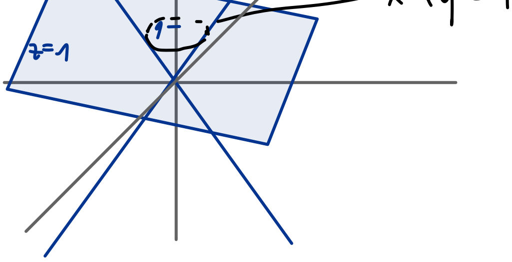
Množico vseh projektivnih ničel danega homogenega polinoma F označimo z $V_h(F)$.

$$V_h(F)=\{[a:b:c] \mid F(a,b,c)=0\}$$

(Projektivno ravnino označimo z $P_2(\mathbb{C})$)

Podmnožica C projektivne ravnine je projektivna algebraična krivulja, če obstaja tak nekonstanten homogen polinom F, da je $C=V_h(F)$

Kakšna je zveza med projektivnimi in afinimi alg. krivuljami?



Dehomogenizacija homogenega polinoma

$F(x,y,z) \xrightarrow{z=1} f(x,y)=F(x,y,1)$ proj → afin

Homogenizacija polinoma

$f(x,y) \longrightarrow F(x,y,z) = z^{\deg f} f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ afin → proj

npr $$\underbrace{\underbrace{x^2}_{f_2}+\underbrace{y+x}_{f_1}+\underbrace{1}_{f_0}}_{\text{homogene komponente od } f} \longrightarrow z^2\left(\left(\frac{x}{z}\right)^2+\frac{y}{z}+\frac{x}{z}+1\right)=$$

$$=\underbrace{x^2}_{f_2}+\underbrace{yz+xz}_{f_1\cdot z}+\underbrace{z^2}_{f_0\cdot z^2}$$

Imamo vložitev afine ravnine v projektivno:

$$i: \mathbb{C}^2 \longrightarrow P_2(\mathbb{C})$$
$$(x,y) \longmapsto [x:y:1]$$

Kaj vložitev i počne s krivuljami?:

· Naj bo $\mathcal{C} = V_h(F)$ projektivna alg. krivulja (v $P_2(\mathbb{C})$)
Pripadajoča afina alg. krivulja (v $\mathbb{C}^2$) je potem

$$i^{-1}(\mathcal{C}) = \{(x,y) \mid \underbrace{i(x,y)}_{[x:y:1]} \in \underset{V_h(f)}{\underset{\|}{\mathcal{C}}}\} = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid \underbrace{F(x,y,1)}_{f(x,y)\text{ dehomogeniziran}} = 0\} = V(F)$$

· Recimo, da je $\mathcal{C}' = V(f)$ afina alg. krivulja (v $\mathbb{C}^2$)

$$\mathcal{C}' = V(f) = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x,y) = 0\}$$

$$i(\mathcal{C}') = \{\underset{[x:y:1]}{\underset{\|}{i(x,y)}} \mid f(x,y) = 0\} = \{[\tfrac{x}{z} : \tfrac{y}{z} : 1] \mid f(\tfrac{x}{z}, \tfrac{y}{z}) = 0,\ z \neq 0\}$$

$$\overset{\|-\text{ker } z\neq 0}{=} \{[x:y:z] \mid f(\tfrac{x}{\cancel{z}}, \tfrac{y}{\cancel{z}}) = 0,\ z \neq 0\}$$

$$\overset{z\neq 0}{=} \{[x:y:z] \mid \underbrace{z^{\deg f} f(\tfrac{x}{z}, \tfrac{y}{z})}_{F(x,y,z)\text{ homogenizacija}} = 0,\ z \neq 0\}$$

$$= \underbrace{\{[x:y:z] \mid F(x,y,z) = 0\}}_{V_h(F)} \cap \underbrace{\{[x:y:z] \mid z \neq 0\}}_{\text{končne točke v projektivni ravnini}} \quad \text{- to ni krivulja}$$

proj. alg. krivulja

Problem: $i(V(f))$ je podmnožica $V_h(F)$, ni nujno enako. $i(V(f))$ = vse končne točke v $V_h(F)$
Naj bo F homogenizacija od f. Potem pravimo, da je $V_h(F)$ projektivno zaprtje od $V(f)$
Krivulji $V_h(F)$, kjer je F homogenizacija od f, pravimo → krivulji $V(f)$

Katere točke v $V_h(F)$ ne ustrezajo nobeni točki od $V(f)$?
(= Kaj so neskončne projektivne točke v $V_h(F)$)
(= Kaj je $V_h(F) \setminus i(\mathcal{C}')$)

Velja:
$$V_h(F) \setminus i(\mathcal{C}') = V_h(F) \setminus (V_h(F) \cap \overbrace{\{(x:y:z) \mid \underline{z \neq 0}\}) = V_h(F) \cap \{(x:y:z) \mid \underline{z = 0}\}}^{\text{komplement}} =$$
$$= \{[x:y:0] \mid F(x,y,0) = 0\} = \{[x:y:0] \mid \underbrace{f_d(x,y)}_{\text{najvišja homogena komponenta}} = 0\}$$

Kako izračunamo $F(x,y,0)$?
Najprej f razcepimo na homog. komponente: $f = f_d + f_{d-1} + \dots + f_0$
(f_i = vsota vseh monomov stopnje i v f = i-ta komponenta f)
Potem homogeniziramo

$$F(x,y,z) = z^{\deg f} f(\tfrac{x}{z}, \tfrac{y}{z}) = z^{\overset{d}{\deg f}} \Big(\overbrace{f_d(\tfrac{x}{z}, \tfrac{y}{z})}^{\frac{1}{z^d} f_d(x,y)} + f_{d-1}(\tfrac{x}{z}, \tfrac{y}{z}) + \dots + f_0(\tfrac{x}{z}, \tfrac{y}{z}) \Big) =$$
$$= f_d(x,y) + f_{d-1}(x,y) z + \dots + f_0(x,y) z^d$$

homogen polinom v 2 spremenljivkah → razpade na linearne faktorje

Na koncu vstavimo $z = 0$ in dobimo $F(x,y,0) = f_d(x,y) =$

homogen polinom stopnje d v x,y

$$= x^d f_d(1, \tfrac{y}{x}) \underset{?}{=} x^d (\tfrac{y}{x} - \alpha_1)^{m_1} \cdots (\tfrac{y}{x} - \alpha_k)^{m_k} =$$
$$= x^{d - m_1 - \dots - m_k} (y - \alpha_1 x)^{m_1} \cdots (y - \alpha_k x)^{m_k}$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{[0:1:0]}$ $\underbrace{\qquad}_{[1:\alpha_1:0]}$ $\underbrace{\qquad}_{[1:\alpha_k:0]}$

Povzetek: Če je F homogenizacija od f, potem je projektivno zaprtje od $V(f) \overset{\text{def}}{=} V_h(F)$

$= i(V(f)) \cup \{$končno mnogo točk v $\infty\}$

Primer: $x^2 - y^2 = 1$. Iščemo projektivno zaprtje. $= V_h(x^2-y^2-z^2)$

Homogeniziramo $x^2 - y^2 = z^2$

Kaj so neskončne točke v $V_h(x^2-y^2-z^2)$?

$\{[x:y:0] \mid x^2-y^2=0\} = \{[1:1:0], [1:-1:0]\}$ $\longrightarrow$ $x \pm y = 0$

če te dve točki dodamo k tisti hiperboli dobimo proj. zaprtje

10. 3. 2023

PROJEKTIVNE TRANSFORMACIJE

Radi bi zamenjali koordinatni sistem v projektivni ravnini $P_2(K)$
Najprej zamenjamo koordinatni sistem v K^3.

$$\begin{aligned} K^3 &\longrightarrow K^3 \\ \vec{x} &\longmapsto A\vec{x} \end{aligned}$$

A obrnljiva matrika
$\det A \neq 0$

Def: Projektivna transformacija
je taka preslikava
$\phi : P_2(K) \longrightarrow P_2(K)$
$(x:y:z) \longmapsto (ax+by+cz,\ dx+ey+fz,\ gx+hy+iz)$
kjer je $\det \overbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}}^{A} \neq 0$

Vsaka proj. trans. je obrnljiva. Kompozitum dveh proj. trans. je spet proj. trans. Torej proj. trans. tvorijo grupo.

Če $\vec{x}$ in $\vec{y}$ določata isto premico skozi izhodišče, potem je $\vec{y} = \alpha\vec{x}$ za nek $\alpha \in K$. Od tod sledi, da je $A\vec{y} = \alpha A\vec{x}$. Torej $A\vec{x}$ in $A\vec{y}$ tudi določata isto premico skozi izhodišče.

Pokazali smo, da je preslikava

$$\phi : [x:y:z] \longrightarrow \underbrace{[a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z : a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z : a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z]}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & & \\ & & \end{bmatrix} [X : y : z]}_{*}$$

dobro definirana

projektivna transformacija

Če je $\overset{V_h(F)}{\overset{\parallel}{\mathcal{C}}}$ projektivna krivulja, nas zanima, kaj je $\phi(\mathcal{C})$. aka V kaj preslika proj. transformacija proj. alg. krivuljo?

$\mathcal{C} = \{[a:b:c] \mid F(a,b,c) = 0\}$

$\phi(\mathcal{C}) = \{\phi[a:b:c] \mid \underbrace{F(a,b,c) = 0}\}$ $F\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = 0$

$(F \circ \phi^{-1})\,\phi[a:b:c] = 0$

$= \{[x:y:z] \mid (F \circ \phi^{-1})(x,y,z) = 0\}$

$= V_h(\underbrace{F \circ \phi^{-1}}_{\text{homogen polinom iste stopnje kot } F})$ to je tudi algebraična krivulja.

Pri izbiranju koordinatnega sistema v projektivni ravnini nam pomaga

Lema o štirih točkah

Če $p_1, p_2, p_3, p_4 \in P_2(K)$ v splošni legi (nobene tri ne ležijo na isti premici)
in $q_1, q_2, q_3, q_4 \in P_2(K)$ v splošni legi
potem obstaja taka projektivna transformacija $\phi : P_2(K) \longrightarrow P_2(K)$, da velja
$\phi(p_i) = q_i$ za $i = 1,2,3,4$

Opomba: Projektivne transformacije tvorijo grupo za kompozitum.
Torej se lahko omejimo na konkretne q_1, q_2, q_3, q_4

Opomba: Opazimo, da so točke $\overset{q_1=}{[1:0:0]}$, $\overset{q_2=}{[0:1:0]}$, $\overset{q_3=}{[0:0:1]}$ in $\overset{q_4=}{[1:1:1]}$ v splošni legi.
(izračunaj štiri 3x3 determinante)
nobena ni $=0$

Dokaz:

Omejimo se na primer brez $q_1, \dots, q_4$.

Najprej poiščimo proj. transformacijo, ki slika:

$$[x_1 : y_1 : z_1] = p_1 \longmapsto [1:0:0]$$
$$[x_2 : y_2 : z_2] = p_2 \longmapsto [0:1:0]$$
$$[x_3 : y_3 : z_3] = p_3 \longmapsto [0:0:1]$$

$$A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_1 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[x_4 : y_4 : z_4] = p_4 \mapsto [a, b, c] \text{ — to iščemo}$$

$\det A \neq 0$ ker p_1, p_2, p_3 ne ležijo na isti projektivni premici

$p_1, \dots, p_4$ so v splošni legi $\underset{\substack{\uparrow \\ \phi \text{ transformacija} \\ \text{(bijektivna)} \\ \text{obrnljiva}}}{\Longrightarrow}$ $[1:0:0]$, $[0:1:0]$, $[0:0:1]$, $[a, b, c]$ so v splošni legi

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow c \neq 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow b \neq 0$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0 \rightarrow a \neq 0$$

$$[x_4 : y_4 : z_4] = p_4 \mapsto [a, b, c] \longmapsto [1, 1, 1]$$

Preslikava $[x : y : z] \longrightarrow \left[\frac{x}{a} : \frac{y}{b} : \frac{z}{c}\right]$ potem preslika:

$$[a : b : c] \longmapsto [1 : 1 : 1]$$
$$[1 : 0 : 0] \longmapsto \left[\tfrac{1}{a} : 0 : 0\right] = [1 : 0 : 0]$$
$$[0 : 1 : 0] \longrightarrow \left[0 : \tfrac{1}{b} : 0\right] = [0 : 1 : 0]$$

$$[x_1 : y_1 : z_1] = p_1 \longmapsto [1:0:0] \longmapsto [1:0:0]$$
$$[x_2 : y_2 : z_2] = p_2 \longmapsto [0:1:0] \longmapsto [0:1:0]$$
$$[x_3 : y_3 : z_3] = p_3 \longmapsto [0:0:1] \longmapsto [0:0:1]$$
$$[x_4 : y_4 : z_4] = p_4 \mapsto [a, b, c] \longmapsto [1:1:1]$$

Naredimo kompozitum obeh proj. transformacij. □

PRESEK DVEH KRIVULJ

Kako izračunamo vsa presečišča dveh krivulj? 2 metodi
(To je uvod v Bezoutov izrek, ki nam da oceno za število presečišč)

1. ideja: Eno krivuljo parametriziraš, vstaviš v implicitno enačbo druge krivulje in rešiš dobljeno enačbo. Dobiš vrednosti parametrov, ki določajo presečišča.
To dobro deluje za presek krivulje in premice, v splošnem pa ne.
↳ Problem: ni lahko globalno param. krivulje, to obstaja recimo pri krivuljah 1. (premice) in 2. reda, v splošnem imamo samo lokalno param.

2. ideja: Pomagamo si z rezultantami.

$(a,b) \in V(f) \cap V(g)$

$f(a,b)=0$ in $g(a,b)=0$

$\Rightarrow f(a,y)$ in $g(a,y)$ imata skupno ničlo ($\Leftrightarrow$ skupen linearen faktor)

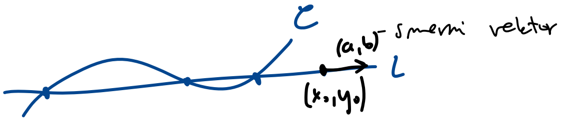
i) Najprej izračunamo $R_{f,g}$ (glede na y)
ii) Potem rešimo enačbo $R_{f,g}=0$ in dobimo recimo rešitev a ?
iii) Izračunaš ničle od $f(a,y)$ in $g(a,y)$ in ugotoviš, kateri so ničle od obeh.

Opomba: Če imata polinoma f,g skupen nekonstanten faktor h, potem $h|f$ in $h|g$
$\Rightarrow V(h) \subseteq V(f)$ in $V(h) \subseteq V(g)$
$\Rightarrow V(h) \subseteq V(f) \cap V(g)$
↑ vemo, da je neprazen, ampak lahko dokažemo, da ima neskončno točk

Bezoutov izrek nam pove, da v nasprotnem primeru (ko sta f in g tuja), ima $V(f) \cap V(g)$ končno presečišč (v resnici $\leq \deg f \deg g$)

PRESEK KRIVULJE IN PREMICE

Imamo krivuljo $\mathcal{C}=V(f)$ in premico L



Premico najprej parametriziramo:

$x = x_0 + at$
$y = y_0 + bt$

To vstavimo v enačbo krivulje

$$0 = f(x,y) = \underbrace{f(x_0+at,\ y_0+bt)}_{g(t)}$$

Dobili smo polinomsko enačbo $g(t)=0$

(Opazimo, da je $\deg g \leq \deg f$)
↑ < je lahko če se kaj odšteje

Če so $t_1,\dots,t_k$ rešitve, potem so $(x_0+at_i,\ y_0+bt_i)$ iskana presečišča in število presečišč

št. preseč. $= g(t)=0 \leq \deg g \leq \underbrace{\deg f \overset{?}{=} \deg \mathcal{C} \cdot \deg L}_{?}$ (različica Bezoutovega izreka)

Predpostavljamo, da $L \notin \mathcal{C} \Rightarrow g \not\equiv 0$

če $g \equiv 0$ potem je premica vsebovana v krivulji → ∞ presečišč

Če polinom za L deli polinom za f, imata L in $V(f)$ neskončno presečišč.

Ali lahko definiramo večkratnost presečišča tako, da bo vsota večkratnosti vseh presečišč enaka $\deg \mathcal{C}$ $(=\deg \mathcal{C} \cdot \deg L)$

Ideja: večkratnost $\underline{\text{presečišča}}$ $\leftarrow (x_0+at_i, y_0+bt_i)$ = večkratnost $(t-t_i)$ v $g(t)$ — večkratnost t_i kot ničle $g(t)$

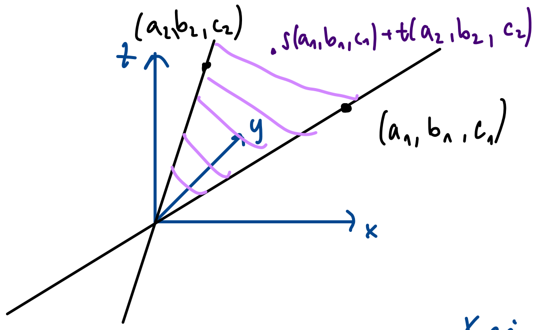
Problem: Vsota večkratnosti $= \deg g(t)$ kar ni nujno enako $\deg f$. (lahko je $\deg g < \deg f$)

Izkaže se, da ta problem izgine, če upoštevamo tudi točke v ∞ (zato delamo raje projektivno)

Poskusimo narediti isto še projektivno.

Naj bo $\mathcal{C} = V_h(F)$ ← homogen projektivna algebraična krivulja in L projektivna premica. $L \not\subseteq \mathcal{C} \Rightarrow g \not\equiv 0$

Najprej L parametriziramo.



$L = \{[x:y:z]$, kjer
$x = sa_1 + ta_2$
$y = sb_1 + tb_2$
$z = sc_1 + tc_2$ $\}$

To vstavimo v enačbo krivulje

$$0 = F(x,y,z) = \underbrace{F(sa_1+ta_2, sb_1+tb_2, sc_1+tc_2)}_{g(s,t)}$$

Kaj vemo o $g(s,t)$?

1) $\deg g = \deg F$ — glavna razlika z afinim primerom Kako to vemo?

2) $g(s,t)$ je homogen polinom v dveh spremenljivkah. (Vsi monomi v s,t so iste stopnje)

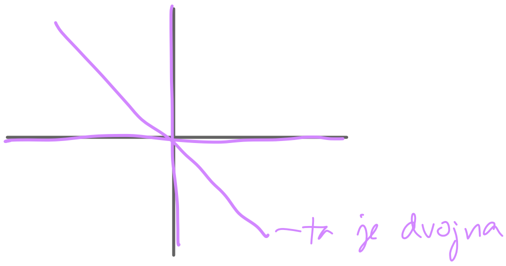
$g(s,t) = 0$

$\underbrace{t^{\deg} g(\frac{s}{t}, 1) = 0}_{\text{enačba v eni spremenljivki}}$

Ker je $g(s,t)$ homogen, razpade na linearne faktorje.
Torej ima končno ničel $[s_1 : t_1], \dots, [s_k : t_k]$
(Lahko definiramo tudi večkratnosti teh ničel kot stopnje ustreznih linearnih faktorjev)
Večkratnost presečišča $(s_i a_1 + t_i a_2, \dots)$ potem definiramo kot večkratnost ničle $[s_i : t_i]$
Tokrat pa velja:

vsota večkratnosti presečišč = vsota večkratnosti vseh ničel od $g(s,t)$
$= \deg g(s,t)$
$= \deg F(x,y,z) = \deg \mathcal{C} = \deg \mathcal{C} \cdot \deg L$

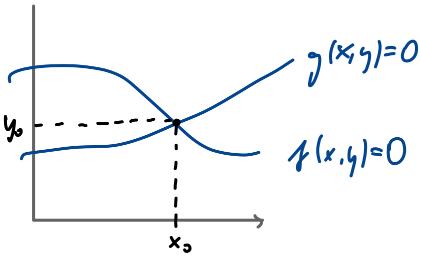
Recimo: $g(s,t) = 2st^3 + 4s^2t^2 + 2s^3t = 2st(t^2+2st+s^2) = 2st(s+t)^2$
ima $\underline{4}$ proj. $\underline{\text{ničle}}$ (vsak faktor določi eno)



BEZOUTOV IZREK: UVOD

Zanima nas presek dveh krivulj. Privzamemo, da sta pripadajoča polinoma tuja, sicer imamo neskončen presek. Zanima nas, koliko točk je v preseku.
Ideja: $\{f=0\} \cap \{g=0\}$ ima $\deg f \cdot \deg g$ presečišč pod pogojem, da upoštevamo tudi presečišča v ∞ in večkratnost presečišč ustrezno definiramo.
Sicer imamo $\leq \deg g \cdot \deg f$ presečišč

Bezoutov izrek (projektivna verzija)
Naj bosta $F, G \in \mathbb{C}[x,y,z]$ homogena nekonstantna polinoma, ki nimata skupnega nekonstantnega faktorja.
1) $V_h(F) \cap V_h(G)$ je končna množica.
2) $\# V_h(F) \cap V_h(G) \leq \deg F \cdot \deg G$
3) Če primerno definiramo večkratnost presečišča, potem je vsota večkratnosti vseh presečišč enaka $\deg F \cdot \deg G$



$G(x,y,z)=0$

$F(x,y,z)=0$

$Res_{F,G}$ (glede na z) je polinom v x, y.

$f(x_0,y)$ in $g(x_0,y)$ imata skupni faktor $(y-y_0)$ torej je njima rezultanta enaka 0

Recept za iskanje presečišč:
1. korak: Izračunaj rezultanto f in g glede na y. Dobiš $R_{f,g}(x)$
2. korak: Poišči ničle $R_{f,g}(x)$, $\underline{\text{npr. } R_{f,g}(x)=0}$?
3. korak: Poišči skupne ničle $f(x_0,y)$ in $g(x_0,y)$
Ideja: Večkratnost presečišča = stopnja ničle x_0 v $R_{f,g}$

Opomba: Če bi imela $f(x_0,y)$ in $g(x_0,y)$ ∞ skupnih ničel, potem bi krivulji $f=0$ in $g=0$ vsebovali premico $\{(x_0,y) \mid y \in \mathbb{C}\}$, torej imata f in g skupen faktor, kar je v nasprotju s predpostavko

$Res_{F,G}$ (glede na z) je polinom v x, y.
Treba je pokazati, da je ta polinom homogen in izračunati njegovo stopnjo.

$$F(x,y,z) = \overbrace{a_0(x,y)}^{\text{stopnje } d} z^m + \overbrace{a_1(x,y)}^{d+1} z^{m-1} + \dots + \overbrace{a_m(x,y)}^{d+m}$$
$$G(x,y,z) = \underbrace{b_0(x,y)}_{e} z^n + \underbrace{b_1(x,y)}_{e+1} z^{n-1} + \dots + \underbrace{b_n(x,y)}_{e+n}$$

$$Res_{F,G}(x,y) = \det \begin{bmatrix} a_0(x,y) & a_1(x,y) & \dots & \dots & a_m(x,y) & & \\ & a_0(x,y) & a_1(x,y) & \dots & & a_m(x,y) & \\ & & \ddots & & & & \ddots \\ & & & a_0(x,y) & \dots & \dots & a_m(x,y) \\ b_0(x,y) & b_1(x,y) & \dots & \dots & b_n(x,y) & & \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ & b_0(x,y) & b_1(x,y) & \dots & \dots & & b_n(x,y) \end{bmatrix}$$

$\deg F = d+m$, kjer je $d = \deg a_0$
$\deg G = e+n$, kjer je $e = \deg b_0$

Pokazali bomo, da je $Res_{F,G}$ homogen polinom stopnje
$\deg F \cdot \deg G - \deg a_0 \cdot \deg b_0 = (d+m)(e+n) - de = mn + dn + me$

Vstavimo: $x \longrightarrow Tx$, $y \longrightarrow Ty$ veliki x in y?

Dokazujemo: $R_{F,G}(TX,TY)=T^{mn+dn+me}R_{F,G}(X,Y)$

$$Res_{F,G}(Tx,Ty)=\det\left[\begin{array}{ccccc} T^{d}a_0(x,y) & T^{d+1}a_1(x,y) & \dots & T^{d+m}a_m(x,y) & \\ & T^{d}a_0(x,y) & T^{d+1}a_1(x,y) & \dots & T^{d+m}a_m(x,y) \\ & & \ddots & & T^{d+m}a_m(x,y) \\ T^{e}b_0(x,y) & T^{e+1}b_1(x,y) & \dots & T^{e+n}b_n(x,y) & \\ & \ddots & & & \ddots \\ & T^{e}b_0(x,y) & T^{e+1}b_1(x,y) & \dots & T^{e+n}b_n(x,y) \end{array}\right]\begin{array}{c} T^{e+1} \\ T^{e+2} \\ \vdots \\ T^{e+n} \\ T^{d+1} \\ \vdots \\ T^{d+m} \end{array}$$

Ideja: Pomnoži vrstice z potencami T tako, da bomo imeli znotraj posameznih stolpcev enake potence T.

$$\underline{T^{e+1}T^{e+2}\dots T^{e+n}T^{d+1}\dots T^{d+m}}\,Res_{F,G}(TX,TY)\longrightarrow T^{ne+\frac{n(n+1)}{2}+md+\frac{m(m+1)}{2}}R_{F,G}(TX,Ty)$$

$$=\det\left[\begin{array}{ccccc} T^{d+e+1}a_0 & T^{d+e+2}a_1 & \dots & T^{d+e+m+1}a_m & \\ & T^{d+e+2}a_0 & T^{d+e+3}a_1 & \dots & T^{d+e+m+2}a_m \\ & \ddots & & & \ddots \\ T^{d+e+1}b_0 & T^{d+e+2}b_1 & \dots & T^{d+e+m+1}b_n & \\ & T^{d+e+2}b_0 & \dots & & T^{d+e+n+2}b_n \\ & \ddots & & & \ddots \end{array}\right]=$$

je enako

$$=\underbrace{T^{d+e+1}T^{d+e+2}\dots T^{d+e+m+n}}_{\text{iz vsakega stolpca izpostavimo T-je}}Res_{F,G}(x,y)\longrightarrow T^{(m+n)(d+e)+\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}}R_{F,G}(x,y)$$

$$(m+n)(d+e)+\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}-ne-\frac{n(n+1)}{2}-md-\frac{m(m+1)}{2}$$

$$\cancel{md}+me-nd+\cancel{ne}+\frac{\cancel{m^2}+mn+\cancel{m}+nm+\cancel{n^2}+\cancel{n}}{2}-\cancel{ne}-\frac{\cancel{n^2}+\cancel{n}}{2}-\cancel{md}-\frac{\cancel{m^2}+\cancel{m}}{2}=$$

$$=me+nd+mn=(m+d)(n+e)-de=\deg F\cdot\deg G-\deg a_0\deg b_0$$

VSOTA ARITMETIČNEGA ZAP.: $S=\frac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}$

$$1+2+\dots+(m+n)=\frac{(m+n)(2+(m+n-1))}{2}=\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}$$

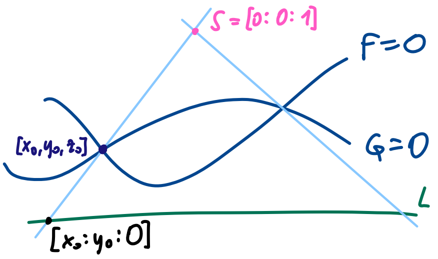
$$\left[\begin{array}{l} T^{d+e+1+(d+e+2)+\dots+(d+e+m+n)} \\ T^{(d+e)(m+n)+1+2+\dots+(m+n)} \end{array}\right.$$

Torej: $\deg R_{F,G}\le\deg F\cdot\deg G$

Enakost velja $\Longleftrightarrow$ $\deg a_0=0$ ali $\deg b_0=0$

BEZOUTOV IZREK: DOKAZ

Skica:



PREŠTEJMO PRESEČIŠČA:

Najprej izberemo točko S, ki ne leži niti na $F=0$ niti na $G=0$.

ALI TAKA TOČKA SPLOH OBSTAJA: $V_a(F) \cup V_a(G) = V_a(F \cdot G) = VK \Rightarrow F \cdot G \equiv 0 \Rightarrow F \equiv 0$ ali $G \equiv 0$ ⟶✗
cela proj. ravnina

Potem izberemo še tako premico L, ki ne gre skozi S.

Skozi vsako presečišče potegnemo premico, ki gre tudi skozi S in to premico sekamo s premico L
(= presečišča projeciramo iz S na L)

Dokazati moramo dvoje:

a) Na vsaki premici skozi S je kvečjemu končno mnogo presečišč } na vsaki premici je končno presečišč

b) Projekcij presečišč iz S na L je končno. } premic je končno

Če (a) ne drži, potem je na neki premici skozi S neskončno mnogo presečišč.

$\Rightarrow$ Ta premica seka $F=0$ v ∞ točkah in $G=0$ v ∞ točkah.

$\Rightarrow$ Ta premica je vsebovana tako v $V_a(F)$ kot v $V_a(G)$

$\overset{\text{Study}}{\Longrightarrow}$ polinom od te premice deli tako F kot G

$\Longrightarrow$ F in G nista tuja ⟶✗

Dokazujemo b):

Najprej izberemo koordinatni sistem tako, da velja $S=[0:0:1]$ in
L = premica $z=0$
= premica v ∞

Lema o štirih točkah

Vsaka točka $[x_0:y_0:0]$ na L je projekcija enega ali več presečišč oblike $[x_0:y_0:z_0]$

Iščemo torej take točke $[x_0:y_0:0]$ za katere obstaja tak z, da je $F(x_0,y_0,z)=G(x_0,y_0,z) \Leftrightarrow R_{F,G}(x_0,y_0)=0$

Torej je (x_0,y_0) ničla od $R_{F,G}(x,y)$
$\uparrow$
homogen polinom $\deg R_{F,G} \le \deg F \deg G$

Pokažimo še, da ima enačba $R_{F,G}(x,y)=0$ končno rešitev.

Vsak homogen polinom v dveh spremenljivkah razpade na linearne faktorje in vsak linearen faktor določa neko projektivno točko.

F,G tuja $\Rightarrow R_{F,G} \not\equiv 0 \Rightarrow R_{F,G}$ končno proj. ničel $\Rightarrow$ na L je končno projekcij presečišč

ker sta F,G homogena $\Rightarrow R_{F,G}$ homogen $\Rightarrow R_{F,G}$ razpade na lin. faktorje razen $(0,0)$

To dokaže točko (b).

To je bil dokaz (1) točke Bezoutovega izreka

Dokaz (2) točke: podoben dokaz (1) točke, edino smo bolj previdni pri izbiri S.
S izberemo tako, da ne leži niti na $F=0$ niti na $G=0$ niti na nobeni premici skozi dve presečišči (zato smo prej rabili dokazati da je presečišč končno)
S smo izbrali tako, da je na vsaki premici samo eno presečišče. Torej vsaka ničla $R_{F,G}$ določa samo eno presečišče.

$\Rightarrow$ # presečišč $\leq \deg R_{F,G} \leq \deg F \cdot \deg G$

Pri (3) točki rabimo, ~~da je~~ $\deg R_{F,G} = \deg F \cdot \deg G$
(potem večkratnost presečišča definiramo s stopnjo ničle v $R_{F,G}$
Vemo, da je $\deg R_{F,G} = \deg F \cdot \deg G - \deg a_0 \cdot \deg b_0$
Pokazati moramo, da je $\deg a_0 = \deg b_0 = 0$
To sledi iz izbire točke S

$$F = \overbrace{a_0(x,y)}^{d} z^m + \overbrace{a_1(x,y)}^{d+1} z^{m-1} + \dots + \overbrace{a_m(X,y)}^{d+m} \quad \text{- stopnje}$$

Vstavimo $(0,0,1)$
Ker S ne leži na $F=0$ je $F(0,0,1) \neq 0$.
Po drugi strani je:

$$F(0,0,1) = \underbrace{a_0(0,0)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \underbrace{a_1(0,0)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \dots + \underbrace{a_m(0,0)}_{\overset{\shortparallel}{0}}$$

če $d \neq 0$: $0 \quad 0 \quad 0 \quad \times \quad F(0,0,1) \neq 0$

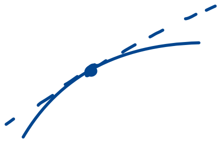
če $d = 0$: $a_0(x,y)$ je konstanten $\Rightarrow \deg a_0 = 0$ (podobno za b_0)

31. 3. 2023

TANGENTE IN SINGULARNOSTI

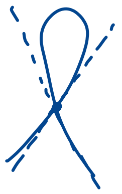
Uvod

Ideja: Regularna točka



→ tangente smo pri analizi računali

Singularna točka



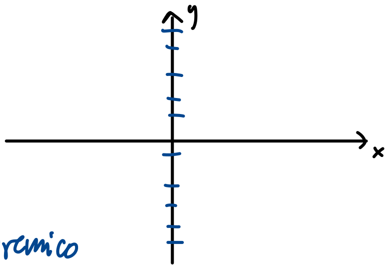
Računali bomo tangente v obeh primerih.

Def. Točka (x_0, y_0) na krivulji $f(x,y)=0$ je singularna, če velja $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0$ in $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$.

minimalni polinom krivulje

Točka, ki ni singularna je regularna.

Problem: Imamo premico $x=0$
Vsaka točka na tej premici je regularna
(ker $\frac{\partial x}{\partial x}=1 \neq 0$)



Tudi $x^2=0$ določa isto premico

$$\frac{\partial x^2}{\partial x} = 2x = 0 \qquad \frac{\partial x^2}{\partial y} = 0$$

Tudi v splošnem: $f(x,y)$
$f(x,y)^2$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)^2 = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 2f$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)^2 = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 2f$$

$$f(x_0,y_0)^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f^2}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$$

Namk: Ni vseeno, katero enačbo od krivulje vzamemo. Definicija se nanaša na minimalni polinom krivulje.

Polinom $f \in \mathbb{C}[x,y]$ je minimalni pol. krivulje $\mathcal{C} \in \mathbb{C}^2$, če: (1) $\mathcal{C} = V(f)$
(2) f nima večkratnih faktorjev

Po studyjevi lemi je enolično določen

Primeri:

1) Vsaka točka na vsaki premici je regularna.

$f(x,y) = ax + by + c$

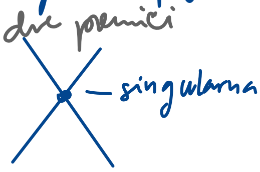
$\frac{\partial f}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = b$

če sta v neki točki oba parcialna odvoda nič, potem je $a=b=0$ in to ni premica.

2

2) Če je $f(x,y)$ druge stopnje, potem imamo dve možnosti:

a) f razcepen:



b) f nerazcepen: vse točke na $f=0$ so regularne

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

kongruentno/tangentno $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$ ⇒ kaj? ta izraz je lin. komb. dveh ?? ⇓ ga lahko faktoriziramo

Če obstaja singularna točka, potem ima sistem

$f=0 \quad \frac{\partial f}{\partial x}=0 \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0$

skupno rešitev:

$$0=\frac{\partial f}{\partial x}=2ax+2by+2d$$

$$0=\frac{\partial f}{\partial y}=2bx+2cy+2e$$

$$0=f-\frac{x}{2}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{y}{2}\frac{\partial f}{\partial y}=\cancel{ax^2}+\cancel{2bxy}+\cancel{cy^2}+2dx+2ey+f$$
$$-(\cancel{ax^2}+\cancel{bxy}+dx)$$
$$-(\cancel{bxy}+\cancel{cy^2}+ey)$$
$$=dx+ey+f$$

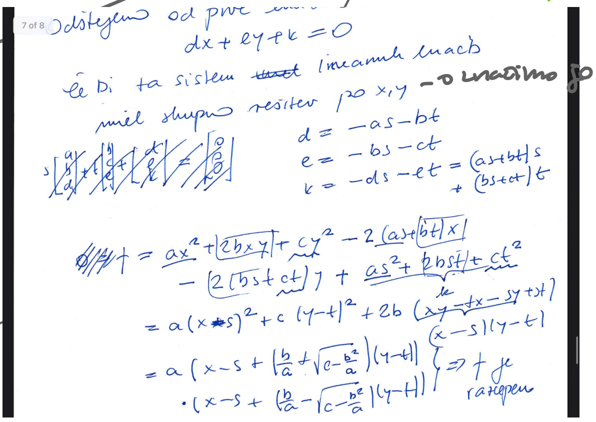
$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ima rešitev

⇓

rang $A \leq 2$

6 zapiski:



7 of 8

Odštejem od prve ...

$dx+ey+k=0$

če bi ta sistem ~~[illegible]~~ linearnih enačb imel skupno rešitev po x,y → označimo jo (s,t)

$$\cancel{s\begin{bmatrix} a \\ b \\ d \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} b \\ c \\ e \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} d \\ e \\ k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$d=-as-bt$

$e=-bs-ct$

$k=-ds-et=(as+bt)s+(bs+ct)t$

$$f=ax^2+\boxed{2bxy}+cy^2-2(as+\boxed{bt})x-(2(bs+ct))y+as^2+2bst+ct^2$$
$$=a(x-s)^2+c(y-t)^2+2b\underbrace{(xy-tx-sy+st)}_{(x-s)(y-t)}$$
$$=a\left(x-s+\left(\frac{b}{a}+\sqrt{c-\frac{b^2}{a}}\right)(y-t)\right)\cdot\left(x-s+\left(\frac{b}{a}-\sqrt{c-\frac{b^2}{a}}\right)(y-t)\right)$$

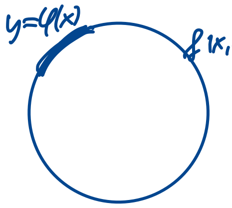
⇒ f je razcepen

TANGENTE NA REGULARNIH TOČKAH

Če je (x_0,y_0) regularna točka na $f(x,y)=0$ potem je $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$ ali $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$

izrek o implicitni funkciji ⇒ Obstaja taka funkcija $y=\varphi(x)$, ki:

- je definirana v okolici x_0
- zadošča $\varphi(x_0)=y_0$
- zadošča $f(x,\varphi(x))=0$ za vsak $x\in D(\varphi)$



Tangenta na $f(x,y)=0$ v (x_0,y_0) = tangenta na $y=\varphi(x)$ v (x_0,y_0)

Ta tangenta ima enačbo

$$y = \underbrace{\varphi(x_0)}_{y_0} + \underbrace{\varphi'(x_0)}_{\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}}(x-x_0)$$

Če $f(x,\varphi(x))=0$ odvajamo po x dobimo $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\varphi'(x)=0$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$$

$$\varphi'(x_0) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

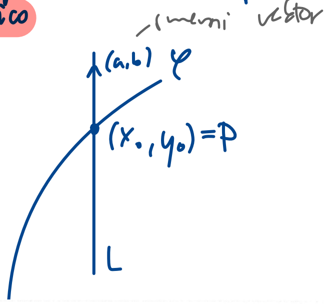
To uredimo in dobimo $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=0$

To je enačba tangente v reg. točki.

Primer $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$ obravnavamo podobno in dobimo isto enačbo za tangento v (x_0,y_0)

TANGENTE V SINGULARNI TOČKI

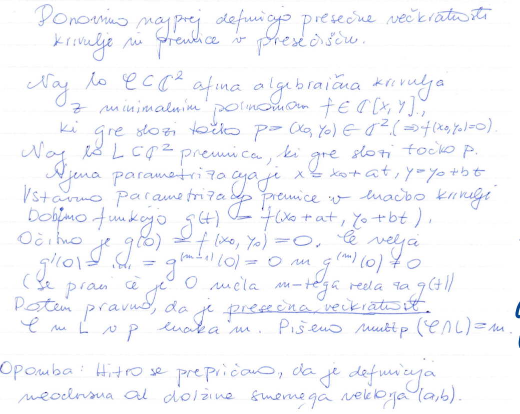
V definiciji bomo potrebovali pojem presečne večkratnosti med krivuljo in premico



$\text{mult}_P(\mathcal{C}\cap L)$ = presečna večkratnost $\mathcal{C}$ in L v P $\overset{def}{=}$

$\overset{def}{=}$ stopnja ničle 0 za $g(t)$

$= \max k : t^k \mid g(t)$


Ponovimo najprej definicijo presečne večkratnosti krivulje in premice v presečišču.

Naj bo $\mathcal{C}\subset\mathbb{C}^2$ afina algebraična krivulja z minimalnim polinomom $f\in\mathbb{C}[x,y]$, ki gre skozi točko $P=(x_0,y_0)\in\mathbb{C}^2$. $(\Rightarrow f(x_0,y_0)=0)$.
Naj bo $L\subset\mathbb{C}^2$ premica, ki gre skozi točko P.
Njena parametrizacija je $x=x_0+at$, $y=y_0+bt$
Vstavimo parametrizacijo premice v enačbo krivulje
Dobimo funkcijo $g(t)=f(x_0+at, y_0+bt)$.
Očitno je $g(0)=f(x_0,y_0)=0$. Če velja
$g'(0)=\dots=g^{(m-1)}(0)=0$ in $g^{(m)}(0)\neq 0$
(še pravi: če je 0 ničla m-tega reda za $g(t)$)
Potem pravimo, da je presečna večkratnost $\mathcal{C}$ in L v P enaka m. Pišemo $\text{mult}_P(\mathcal{C}\cap L)=m$.

Opomba: Hitro se prepričamo, da je definicija neodvisna od dolžine smernega vektorja (a,b).

Premico L najprej parametriziramo $x=x_0+at$, $y=y_0+bt$

To vstavimo v enačbo krivulje $\mathcal{C}$ in dobimo funkcijo $g(t)=f(x_0+at, y_0+bt)$. Očitno je $g(0)=0$

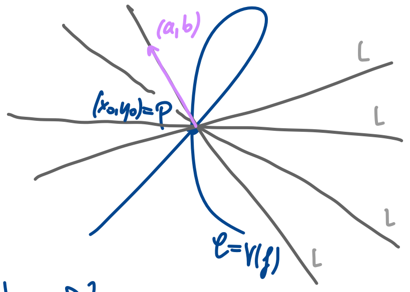
Kako def. tangento v singularni točki? 7. zapiski

V dveh korakih:

Najprej definiramo red točke P. To je $\mathrm{ord}_p(\mathcal{C}) = \min\{\mathrm{mult}_p(\mathcal{C} \cap L) \mid L \text{ premica skozi } P\}$

Premica $\underline{T}$ je tangenta na krivuljo $\mathcal{C}$ v točki P, če je $\mathrm{mult}_p(T \cap \mathcal{C}) > \mathrm{ord}_p(\mathcal{C})$.

tiste, ki se bolj prilegajo krivulji $\mathcal{C}$



Kako izrazimo red točke P?
Kako poiščemo vse tangente skozi P?

Računamo $\mathrm{mult}_p(\mathcal{C} \cap L)$

$$g(t) = f(x_0 + at, y_0 + bt)$$
$$g(0) = f(x_0, y_0) = 0$$
$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + at, y_0 + bt) \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + at, y_0 + bt) \cdot b$$
$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) b$$
$$g''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) a^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot 2ab + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot b^2$$
$$g'''(0) = \dots$$

Računamo, dokler ne pride $\neq 0$.

Če so vsi členi 0 ⟹ Taylorjeva vrsta je 0 ⟹ g se ujema s svojo Tay. vrsto (ker je polinom) ⟺ $g(t)=0$ ⟹ $f(x_0+at, y_0+bt)=0$ za $\forall t$ ⟹ premica p je vsebovana v $\mathcal{C}$ ⟹ ⟹ presečna večkratnost je ∞

Računamo $\mathrm{ord}_p(\mathcal{C})$

$$\mathrm{ord}_p(\mathcal{C}) \geq k \xLeftrightarrow{\text{def. ord}_p} \mathrm{mult}_p(\mathcal{C} \cap L) \geq k \text{ za vsak } L \text{ skozi } P$$

$$\xLeftrightarrow{\text{def. mult}_p} g(0) = g'(0) = \dots = g^{(k-1)}(0) = 0 \quad \text{za } \forall a, b$$

⟺ vsi parcialni odvodi f reda $< k$ so enaki 0 v (x_0, y_0)

Kdaj je $\mathrm{ord}_p(\mathcal{C}) = k$? Ko $g^{(k)}(0) \neq 0$ za neka a in b
⟺ obstaja parcialni odvod reda k, ki ni 0 (vsi nižjega reda pa so enaki 0)

Dokazali smo, da je:

$$\mathrm{ord}_p(\mathcal{C}) = \underbrace{\min\left\{i+j \;\middle|\; \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, y_0) \neq 0\right\}}_{\text{To bomo označevali z } \mathrm{ord}_p f} = k \downarrow$$

če je $(x_0, y_0) = (0,0)$, potem je $\mathrm{ord}_p f$ stopnja najnižjega monoma

Računanje tangent v P:

Iščemo tako premico L skozi P, da je $\operatorname{mult}_P(\mathcal{C} \cap L) > \underbrace{\operatorname{ord}_P \mathcal{C}}_{k}$

$\operatorname{ord}_P \mathcal{C} = k \Rightarrow \operatorname{mult}_P(\mathcal{C} \cap L) \geq k+1$ za vsak L

$\Rightarrow g(0) = \ldots = g^{(k-1)}(0) = 0$ za vse a, b

$g^{(k)}(0)$ ni nič za nek a, b, ampak nas zanima tisti a, b, pri katerem to je nič torej $g^{(k)} = 0$

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2$$
$$+ \ldots$$

Če je red točke (x_0, y_0) na $f = 0$ enak 2, potem odpade konstantni in linearni člen, kvadratni člen pa ni nič.

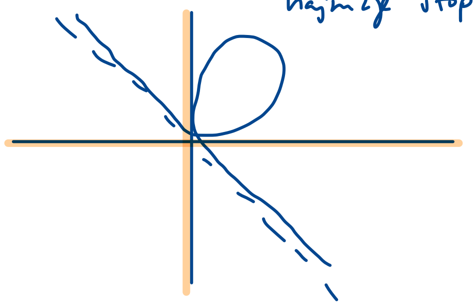
Tangente v (x_0, y_0) dobimo s faktorizacijo kvadratnega člena. (če $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Če ne prevedemo na primer $(0,0)$)

Najpreprostejše je v primeru $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Seštejemo vse člene najnižje stopnje in dobljen izraz faktoriziramo.

Dobimo vse premice, ki so tangentne na krivuljo v $(0, 0)$.

Primer: $x^3 + y^3 - \underbrace{3xy}_{\text{najnižje stopnje}} = 0$



🟧 tangenti

Dobimo dve tangente $x = 0$ in $y = 0$.

Če $p \neq (0,0)$, $p = (x_0, y_0)$

s premikom $g(x,y) = f(x + x_0, y + y_0)$

$(0,0) \in V(g) \Leftrightarrow (x_0, y_0) \in V(f)$

7. 4. 2023

Primer:

$\operatorname{ord}_p \mathcal{C} = 0 \Leftrightarrow p \notin \mathcal{C}$

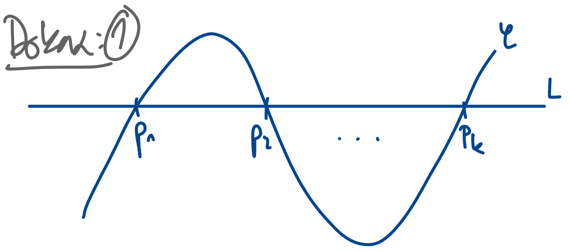
$\operatorname{ord}_p \mathcal{C} = 1 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0$ ali $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0 \Leftrightarrow p$ regularna na $\mathcal{C}$

$\operatorname{ord}_p \mathcal{C} = 2 \Leftrightarrow p$ je singularna točka na $\mathcal{C}$

② $\mathrm{ord}_p \mathcal{C} = \deg \mathcal{C} \iff \mathcal{C}$ je unija različnih premic skozi p

③ $\mathrm{ord}_p \mathcal{C} = \deg \mathcal{C} - 1 \implies \mathcal{C}$ ima racionalno parametrizacijo

Dokaz: ①



$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{ord}_{p_1}\mathcal{C} & + \dots + & \mathrm{ord}_{p_k}(\mathcal{C}) & \overset{?}{\le} & \deg\mathcal{C} \\ \rotatebox{90}{$\geq$} & & \rotatebox{90}{$\geq$} & & \\ \mathrm{mult}_{p_1}(\mathcal{C}\cap L) & + \dots + & \mathrm{mult}_{p_k}(\mathcal{C}\cap L) & \underset{\uparrow}{\le} & \deg\mathcal{C} \end{array}$$

Bezout

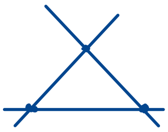
(če $\mathcal{C}$ nerazcepen)

Posledica: Nerazcepna krivulja 3. stopnje (=kubika) ima lahko kvečjemu eno singularnost

Dokaz: Če bi imela dve: p_1, p_2, bi skoznji potegnili premico in uporabili trditev 1.

Dobili bi
$$\underset{\substack{\rotatebox{90}{$\leq$}\\ 2}}{\mathrm{ord}_{p_1}\mathcal{C}} + \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\leq$}\\ 2}}{\mathrm{ord}_{p_2}\mathcal{C}} \le \underset{\substack{\|\\ 3}}{\deg\mathcal{C}} \qquad -\!\!\times\!\!-$$

Za razcepne kubike to ne velja.



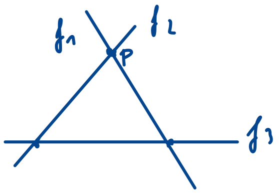
Dokaz ②: V dokazu ② rabimo formulo $\underbrace{\mathrm{ord}_p(f_1 f_2)}_{\text{st. najnižjega monoma v } f_1 f_2} = \underbrace{\mathrm{ord}_p(f_1)}_{\text{st. najnižjega monoma v } f_1} + \underbrace{\mathrm{ord}_p(f_2)}_{\text{st. najnižjega monoma v } f_2}$ (*)

BŠS predpostavimo $p=(0,0)$.

$$\mathrm{ord}_p(f_1 f_2) \overset{\cdot}{=} \mathrm{ord}_p(f_1) + \mathrm{ord}_p(f_2) \qquad \left(\begin{array}{l} g_1(x,y) = f_1(x+a, y+b) \\ g_2(x,y) = f_2(x+a, y+b) \end{array} \right)$$
$$\mathrm{ord}_{(0,0)}(g_1 g_2) \underset{\uparrow}{=} \mathrm{ord}_{(0,0)} g_1 + \mathrm{ord}_{(0,0)} g_2$$

očitno, saj iz $g_1 = (g_1)_{(m_1)} + \dots$ in $g_2 = (g_2)_{(m_2)} + \dots$

sledi $g_1 g_2 = (g_1)_{(m_1)} (g_2)_{(m_2)}$ + monomi višje stopnje



$$\mathrm{ord}(f_1 f_2 f_3) = \underset{\substack{\|\\ 1}}{\mathrm{ord} f_1} + \underset{\substack{\|\\ 1}}{\mathrm{ord} f_2} + \underset{\substack{\|\\ 0}}{\mathrm{ord} f_3} = 2$$

$\implies p$ je singularna točka na $V(f_1 f_2 f_3)$

$(\Leftarrow)$ Če je $\mathcal{C}$ unija različnih premic skozi p, recimo $\mathcal{C} = L_1 \cup \dots \cup L_m$

$\mathrm{ord}_p \mathcal{C} \overset{(*)}{=} \mathrm{ord}_p(L_1) + \dots + \mathrm{ord}_p(L_m) = m$ (to je enako $\deg \mathcal{C}$)

$(\Rightarrow)$ če je $\underset{\substack{\|\\ \text{st. najnižjega monoma v } f}}{\mathrm{ord}_p \mathcal{C}} = \underset{\substack{\|\\ \text{st. najvišjega monoma v } f}}{\deg \mathcal{C}}$ $\implies \mathrm{ord}_p(f) = \deg f$, f minimalni polinom

(recimo $p=(0,0)$ če ne premaknemo)

$\implies$ stopnje vseh monomov v f so enake $\implies f$ je homogen polinom v x, y

$\implies f$ razpade na linearne faktorje $f = \prod_{j=1}^{m} (a_j x + b_j y)$

Ker je f minimalen, so ti faktorji paroma različni. } dobimo m različnih premic skozi $p=(0,0)$

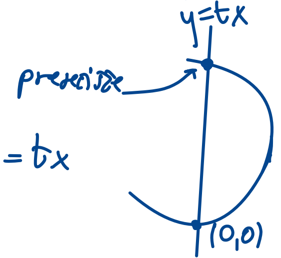
Dokaz ③: BŠS $p=(0,0)$

$\mathrm{ord}_p \mathcal{C} = \deg \mathcal{C} - 1 \qquad \mathcal{C} = V(f)$

Potem ima f samo monome stopenj $m-1$ in m, kjer je $m = \deg \mathcal{C}$.

Pišemo $f = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{vsota monomov stopnje } m-1}}{f_{(m-1)}} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{vsota monomov stopnje } m}}{f_{(m)}}$

Vzamemo poljubno premico skozi skozi $p=(0,0)$, recimo $y=tx$



$$\underset{\uparrow \text{ v presečišču}}{0} = f(x, tx) = \underbrace{f_{(m-1)}(x, tx)}_{\overset{\|}{x^{m-1} f_{(m-1)}(1,t)}} + \underbrace{f_{(m)}(x, tx)}_{\overset{\|}{x^{m} f_{(m)}(1,t)}}$$

Krajšamo x^{m-1} in dobimo $0 = f_{(m-1)}(1,t) + x f_{(m)}(1,t)$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow x &= \frac{-f_{(m-1)}(1,t)}{f_{(m)}(1,t)} \\ y = tx &= \frac{-t f_{(m-1)}(1,t)}{f_{(m)}(1,t)} \end{aligned}\right\}$$

iskana parametrizacija (za eno od komponent $\mathcal{C}$)
zato predpostavimo še, da je $\mathcal{C}$ nerazcepna, da dobimo param. za celo krivuljo.

Obrat velja za krivulje 3. stopnje. (kubike)

SINGULARNOSTI IN TANGENTE ZA PROJEKTIVNE ALG KRIVULJE

Potrebovali bomo Eulerjevo identiteto, ki pravi, da za vsak homogen polinom $F(x,y,z)$ stopnje m velja $x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = m \cdot F$

Dokaz: Ker je F homogen stopnje m, velja $F(tx, ty, tz) = t^m F(x,y,z)$
Na obeh straneh odvajamo po t:
$$\frac{\partial F}{\partial x}(tx, ty, tz)x + \frac{\partial F}{\partial y}(tx, ty, tz) \cdot y + \frac{\partial F}{\partial y}(tx, ty, tz) \cdot z = m \cdot t^{m-1} F(x,y,z)$$
Na koncu vstavimo $t=1$ in dobimo Eulerjevo identiteto.

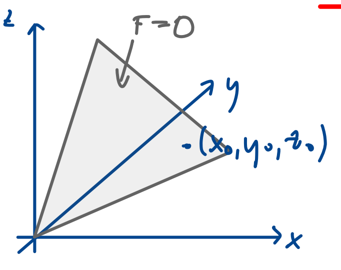
Ideja: Če je $F(p)=0$ in če sta dva parcialna odvoda F v p enaka nič, potem je tudi tretji enak 0.

Def: Proj. točka $[x_0 : y_0 : z_0]$ na $F=0$ je singularna, če velja $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0$ in $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0$ in $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$

Pozor: Iz $\frac{\partial F}{\partial x}(p) = \frac{\partial F}{\partial y}(p) = \frac{\partial F}{\partial z}(p) = 0$ sledi $F(p)=0$ (po Eulerju)

Točka na krivulji F, ki ni singularna, je regularna.

Kako izračunamo tangento v regularni točki?

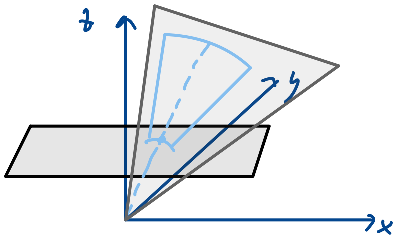


$m = \deg F$

Tangentna ravnina v (x_0, y_0, z_0) (=tangentna proj. premica) ima enačbo
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)x + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)y + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)z =$$
$$= \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)x_0 + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)y_0 + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)z_0 =$$
$$\overset{\text{Euler}}{=} m \cdot F(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Povzetek: enačba tangente v točki p je $\frac{\partial F}{\partial x}(p)x + \frac{\partial F}{\partial y}(p)y + \frac{\partial F}{\partial z}(p) \cdot z = 0$

Alternativno: Sekaš z ravnino $z=1$.
Izračunaš tangento na dobljeno afino krivuljo.
Homogeniziraš enačbo te tangente.



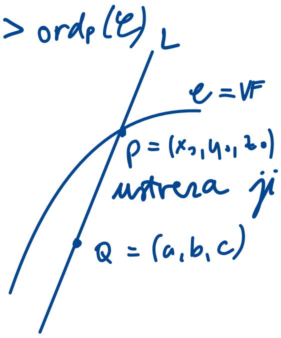
Kaj pa tangente v singularnih točkah.

Ponovimo definicije iz afinega primera

$\text{mult}_p(\mathcal{C}\cap L)=?$

$\text{ord}_p(\mathcal{C}) = \min\{\text{mult}_p(\mathcal{C}\cap L) \mid L \text{ proj. premica skozi } P\}$

Tangente so take premice L, za katere je $\text{mult}_p(\mathcal{C}\cap L) > \text{ord}_p(\mathcal{C})$



ustreza ji $(s:t)=(1:0)$

parametrizacija premice: $sP+tQ$
vstavimo v F → dobimo z
$F(sP+tQ)=$ homogeni polinom v s,t

$\text{mult}_p(\mathcal{C}\cap L)$ = Gledaš stopnjo ničle $(1:0)$, torej najvišjo potenco t, ki deli $F(sP+tQ)$

Primer: Za krivuljo $x^2z^2+y^2z^2-x^2y^2=0$ določi vse singularne točke in tangente v njih

Singularne točke so rešitev sistema enačb:

$0=\frac{\partial F}{\partial x} = 2xz^2-2xy^2 = 2x(z^2-y^2) \Rightarrow x=0$ ali $z^2=y^2$

$0=\frac{\partial F}{\partial y} = 2yz^2-2yx^2 = 2y(z^2-x^2)$

$0=\frac{\partial F}{\partial z} = 2zx^2+2zy^2 = 2z(x^2+y^2)$

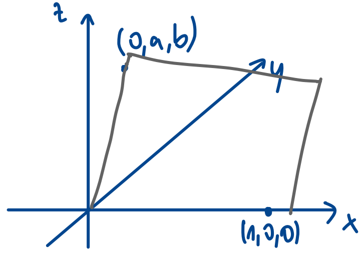
1) $x=0$: $0=2yz^2$
$0=2zy^2$
$\Rightarrow y=0$ ali $z=0$

2) $z^2=y^2$
$z=y$ ali $z=-y$
$\to 2y(y^2-x^2)=0$
$2y(x^2+y^2)=0$ seštejemo
$2y^3=0$
$\Downarrow$
$y=0$
$\Downarrow$
$z=0$

Povzetek: Vedno sta dve komponenti enaki 0, & pravi, da imamo tri rešitve:

$$\underbrace{[1:0:0],\ [0:1:0],\ [0:0:1]}_{\text{vse singularne točke}}$$

Poiščimo tangente v $[1:0:0]$



Vzamemo si eno točko $[0:a:b]$

Proj. premica skozi ti dve točki ima parametrizacijo

$$\left.\begin{aligned} x&=s\\ y&=at\\ z&=bt \end{aligned}\right\} L$$

To vstavimo v F. Dobimo

$$s^2(bt)^2+(at)^2(bt)^2-s^2(at)^2 = s^2t^2(b^2-a^2)+a^2b^2t^4 \quad (\#)$$

$\text{mult}_P(\mathcal{C} \cap L) =$ najvišja stopnja t, ki deli $(*)$

$$= \begin{cases} 4, & \text{če } a^2 = b^2 \\ 2, & \text{če } a^2 \neq b^2 \end{cases}$$

$$\text{ord}_P(\mathcal{C}) = \min\{\text{mult}_P(\mathcal{C} \cap L) \mid L \text{ skozi } P\} = \min\{2, 4\} = 2$$

Tangente so točke, za katere je $\text{mult}_P(\mathcal{C}) = 4$, so prave točke, za katere je $a^2 = b^2$. Imamo dve možnosti: $b = \pm a$

$x = s$	$x = s$
$y = at$	$y = at$
$z = at$	$z = -at$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$y - z = 0$	$y + z = 0$

Alternativno: polinom F dehomogeniziramo glede na X

Dobimo $F(1, y, z) = z^2 + y^2 z^2 - y^2$

Točki $[1:0:0]$ na $V_h(F)$ ustreza točka $(0,0)$ na $V(f)$

Stopnja najnižjega monoma v f je 2

$$\text{ord}_{[1:0:0]} F = \text{ord}_{(0,0)} f = 2$$

Tangente v $(0,0)$ dobimo tako, da faktoriziramo vsoto členov najnižje stopnje

$$z^2 - y^2 = 0 \Rightarrow z = \pm y$$

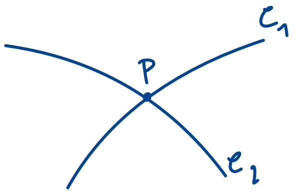
V splošnem bi morali še homogenizirati po X (ampak tukaj ni treba)

14. 4. 2023

Načrt:

- presečna neenakost
- ocena števila singularnosti na nerazcepni krivulji
- —||— na razcepni krivulji

PRESEČNA NEENAKOST



Trditev: $P \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$

$$\text{mult}_P(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) \geq \text{ord}_P \mathcal{C}_1 \cdot \text{ord}_P \mathcal{C}_2$$

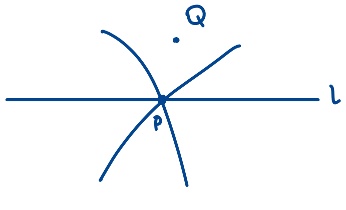
-projektivni primer

Opomba: Ocena je stroga natanko tedaj, ko imata $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ skupno tangento v P.

+ poglej si 4. nal iz 1. DN

Dokaz:

Kako se izračuna $\text{mult}_P(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)$?



$Q \notin \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ Izberemo točko, ki ne leži na $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ ali na kakšni premici skozi presečišča $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$.

L gre skozi P, ampak ne skozi Q.

Spremenimo koordinatni sistem: (s proj. transf.)

$Q = [0:0:1]$, L ima enačbo $z = 0$

$P = [1:0:0]$

Recimo, da enačba $\mathcal{C}_1: F_1 = 0$ (transformirani)
$\mathcal{C}_2: F_1 = 0$

Izračunaj $Res(F_1, F_2)$ glede na z

$mult_P(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)$ = večkratnost faktorja, ki ustreza P, ki ima mesto $[1:0]$
= najvišji potenca y, ki deli $Res(F_1, F_2)$

Naj bo
$$F_1(x,y,z) = a_0(x,y)z^m + a_1(x,y)z^{m-1} + \ldots + a_m(x,y) \qquad \deg a_i = i$$
$$F_2(x,y,z) = b_0(x,y)z^n + b_1(x,y)z^{n-1} + \ldots + b_n(x,y) \qquad \deg b_j = j$$

Naj bo $\underset{\text{najnižji st. monoma}}{\overset{\|}{ord_P F_1}} = r$, $ord_P F_2 = s$, $P = [1:0:0]$

$\downarrow$ dehomogeniziramo glede na x

$(0,0)$

afini primer

Dehomogeniziramo glede na x:

$F_1(1,y,z) = a_0(1,y)z^m + \ldots + a_m(1,y)$ nima členov stopnje $< r$

$F_2(1,y,z) = b_0(1,y)z^n + \ldots + b_n(1,y)$ nima členov stopnje $< s$

$$F_1(1,y,z) = a_0(1,y)z^m + \ldots + a_{m-r}(1,y)z^r + \underbrace{a_{m-r+1}}_{\text{deljiv z } y}(1,y)z^{r-1} + \ldots + \underbrace{a_m(1,y)}_{\text{deljiv z } y^r}$$

Pišemo
$$\left.\begin{aligned} a_{m-r+1} &= y\tilde{a}_{m-r+1} \\ &\vdots \\ a_m &= y^r \tilde{a}_m \end{aligned}\right\} \text{to vstavimo v def. resultante}$$

$\deg \tilde{a}_{m-r+i} = m-r$

Podobno:
$$b_{n-s+1} = y \cdot \tilde{b}_{n-s+1}$$
$$\vdots$$
$$b_n = y^s \cdot \tilde{b}_n$$
$\deg \tilde{b}_{m-1+j} = m-s$

Izračunajmo sedaj resultanto glede na z in pokažimo, da je deljiva z y^{rs}

$$Res(F_1, F_2)(1,y) = \det \begin{bmatrix} a_0(1,y) & \ldots & a_m(1,y) & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & a_0(1,y) & \ldots & a_m(1,y) \\ b_0(1,y) & \ldots & b_n(1,y) & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & b_0(1,y) & \ldots & b_n(1,y) \end{bmatrix} =$$

$$= \det \left[\begin{array}{cccccc|l} a_0 \ldots a_{m-r} & y\tilde{a}_{m-r+1} & \ldots & y^r\tilde{a}_m & & & y^{s-1} \\ & \ddots & & & \ddots & & \\ & a_0 \ldots a_{m-r} & y\tilde{a}_{m-r+1} & \ldots & & y^r\tilde{a}_m & y^s \\ b_0 \ldots b_{m-s} & y\tilde{b}_{m-1+r} & \ldots & y^s \tilde{b}_n & & & y \\ & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & y^{r-1} \\ & b_0 \ldots b_{m-s} & y\tilde{b}_{m-1+r} & \ldots & & y^s\tilde{b}_n & y^r \end{array}\right]$$

Zadnjo vrstico iz a-jev pomnožimo z y^s, predzadnjo z y^{s-1}..., $(n-s+1)$-to z y

Zadnjo iz b-jev z $y^r, \ldots, (m-r+1)$-to z y

Radi bi dokazali, da je to deljivo z y^{rs}

To poskrbi, da so v vsakem od zadnjih $r+s$ stolpcev enake potence.

$$y^s \cdots y \; y^r \cdots y \cdot Res = y^{s+r} \cdots y \cdot \text{polinom}$$

$$Res = y^{1+\ldots+(r+s)-(1+\ldots+r)-(1+\ldots+s)} \cdot \text{polinom} =$$

$$= y^{\frac{(r+s)(r+s+1)}{2} - \frac{r(r+1)}{2} - \frac{s(s+1)}{2}} \cdot \text{polinom} =$$

$$= y^{(\cancel{r^2}+2rs+\cancel{s^2}+\cancel{r}+\cancel{s}-\cancel{r^2}-\cancel{r}-\cancel{s^2}-\cancel{s})/2} \cdot \text{polinom}$$

$$= y^{rs} \cdot \text{polinom}$$

OCENA ZA ŠTEVILO SINGULARNOSTI NA NERAZCEPNI KRIVULJI

Izrek:

Naj bo C nerazcepna projektivna krivulja stopnje n. Trdimo, da ima C največ $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ singularnih točk.

Opomba: Ocena je optimalna: za vsak n je $T_n(x) - T_{n-1}(y) = 0$. [T_k = polinom Čebiš
nerazcepna proj. alg. krivulja z natanko $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ sing. točkami.

Opomba: Za $n = 1, 2$ smo to že dokazali.
premica / krivulja 2. stopnje (2 premici)

Lema: Za vsakih $\frac{n(n+3)}{2}$ točk v projektivni ravnini obstaja projektivna alg. krivulja stopnje $\leq n$, ki gre skozi njih.

Dokaz: Preštejmo koliko monomov stopnje n imamo.

x^n : 1
x^{n-1} : 1 ali y
$\vdots$
x : $1, y, \dots, y^{n-1}$
1 : $1, y, \dots, y^n$
($n+1$ možnosti za x)

št. možnosti: $1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ – toliko je različnih monomov v (x, y, z) stopnje n

Potenca z je natanko določena s potencami x in y.

Koeficienti F so zaenkrat neznani, vemo samo, da jih je $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
Če v $F = 0$ vstavimo neko točko, potem nam to da neko lin. enačbo za neznane koef. polinoma F.

Vzamemo homogen polinom stopnje n z neznanimi koeficienti.
Vstavljamo dane točke v ta polinom.
Vsaka točka nam da eno linearno enačbo za neznane koef.
Koeficientov je $\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{n(n+3)}{2} + 1$
Enačb je $\frac{n(n+3)}{2}$
Vse enačbe so homogene (nimajo konstantnih členov)

Imamo eno neznanko več kot je enačb.

} Poddoločen homogen sistem linearnih enačb.

Vemo, iz Alg 1, da ima tak sistem netrivialno rešitev.

To nam da polinom, ki nima vseh koeficientov enakih 0. (in gre skozi dane točke)

Dokaz izreka:

Vemo, da velja za $n=1,2$, torej lahko predpostavimo, da je $n\geq 3$.

Recimo, da ima $\mathcal{C}$ vsaj $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ singularnih točk.

Na krivulji $\mathcal{C}$ izberemo še $n-3$ dodatnih točk (ne nujno singularnih)

Število vseh točk je $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1+(n-3) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}+(n-2) = (n-2)\left(\frac{n-1}{2}+1\right) =$

$= (n-2)\frac{n+1}{2} = \frac{(n-2)(n-2+3)}{2}$

Uporabimo lemo $(n \longrightarrow n-2)$.

Obstaja neka krivulja stopnje $\leq n-2$, ki gre skozi te točke.

Označimo to krivuljo z $\mathcal{C}'$.

Ali lahko uporabimo Bezoutov izrek za $\mathcal{C}\cap\mathcal{C}'$?

Preveriti moramo, ali sta minimalna polinoma teh krivulj tuja.

Polinom za $\mathcal{C}$ je nerazcepen stopnje n

$\mathcal{C}'$ je stopnje $\leq n-2$

Skupni faktor je stopnje n (ker $\mathcal{C}$ nerazcepen)

–||– $\leq n-2$ (ker deli polinom za $\mathcal{C}'$) } —×—

Bezoutov izrek pravi, da je $\sum_{P\in\mathcal{C}\cap\mathcal{C}'} mult_P(\mathcal{C}\cap\mathcal{C}') = \underbrace{\deg\mathcal{C}}_{n}\cdot\underbrace{\deg\mathcal{C}'}_{n-2}$

$\mathcal{C}\cap\mathcal{C}'$ = unija $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ sing. točk $\mathcal{C}$ in $(n-3)$ dodatnih točk na $\mathcal{C}$.

$$\sum_{P\in\mathcal{C}\cap\mathcal{C}'} = \sum_{\substack{P\in\mathcal{C}\cap\mathcal{C}'\\ P \text{ sing. točka } \mathcal{C}}} + \sum_{\substack{P\in\mathcal{C}\cap\mathcal{C}'\\ P \text{ dodatnih točk na } \mathcal{C}}}$$

Ocenimo $mult_P(\mathcal{C}\cap\mathcal{C}')$ v obeh primerih, pri čemer uporabimo presečno neenakost.

$mult_P(\mathcal{C}\cap\mathcal{C}')\geq ord_P\mathcal{C}\cdot ord_P\mathcal{C}'$.

Če je P singularna točka $\mathcal{C}$, potem je $ord_P\mathcal{C}\geq 2$

$mult_P(\mathcal{C}\cap\mathcal{C}')\geq ord_P\mathcal{C}\cdot ord_P\mathcal{C}' \geq \begin{cases} 2\cdot 1 & ; P \text{ sing.}\\ 1\cdot 1 & ; P \text{ dodatna}\end{cases}$

$\sum_{P \text{ sing.}} mult_P(\mathcal{C}\cap\mathcal{C}') \geq (\text{št. singularnih točk})\cdot 2 = \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1\right)\cdot 2$

$\sum_{P \text{ dodatna}} mult_P(\mathcal{C}\cap\mathcal{C}') \geq (\text{št. dodatnih točk})\cdot 1 \geq (n-3)\cdot 1$

$$\sum_{\substack{P\in\mathcal{C}\cap\mathcal{C}'\\ P \text{ dodatnih točk na } \mathcal{C}\\ \text{in } P \text{ sing}}} \geq (n-1)(n-2)+2+(n-3) = (n-1)(n-2)+n-1 = (n-1)(n-1) = n^2-2n+1 = n(n-2)+1$$

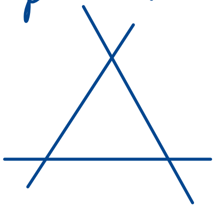
To je za eno več od zgornje ocene $n(n-1)$ —×—

OCENA ŠTEVILA SINGULARNIH TOČK V RAZCEPNEM PRIMERU

Izrek:

Naj bo $\mathcal{C}$ proj. alg. krivulja stopnje n (lahko je razcepna)
Trdimo, da ima $\mathcal{C}$ največ $\frac{n(n-1)}{2}$ singularnih točk

Opomba: Tudi to je optimalna ocena.
Enakost je dosežena v primeru, ko je $\mathcal{C}$ unija n premic v splošni legi.



Lema: $\operatorname{sing}(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2) = \operatorname{sing}\mathcal{C}_1 \cup \operatorname{sing}\mathcal{C}_2 \cup (\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)$ za poljubni $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$

$\supseteq$ je preprosto

Dokaz: $\subseteq$ To sledi $\operatorname{ord}_p(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2) = \operatorname{ord}_p \mathcal{C}_1 + \operatorname{ord}\mathcal{C}_2$

Velja $p \in \operatorname{sing}(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2) \iff \operatorname{ord}(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2) \geq 2 \iff \operatorname{ord}\mathcal{C}_1 \geq 2 \quad (\iff p \in \operatorname{sing}\mathcal{C}_1)$
ali $\operatorname{ord}_p \mathcal{C}_2 \geq 2 \quad (\iff p \in \operatorname{sing}\mathcal{C}_2)$
ali $\operatorname{ord}_p \mathcal{C}_1 = \operatorname{ord}_p \mathcal{C}_2 = 1 \quad (\Rightarrow p \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)$

Dokaz izreka:

Dokaz z indukcijo po n.
$\mathcal{C}$ zapišemo kot unijo nerazcepnih komponent.
Naj bo $\mathcal{C}_1$ ena teh komponent $(\deg \mathcal{C}_1 =: n_1)$
$\mathcal{C}_2$ unija preostalih komponent $(\deg \mathcal{C}_2 =: n_2)$

$$\#\operatorname{sing}\mathcal{C} = \#\operatorname{sing}(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2) \overset{\text{lema}}{=} \underbrace{\#\operatorname{sing}\mathcal{C}_1}_{\substack{\text{prejšnji izrek} \to \wedge\!| \\ \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2}}} + \underbrace{\#\operatorname{sing}\mathcal{C}_2}_{\substack{\wedge\!| \text{ ind. predpost.} \\ \frac{n_2(n_2-1)}{2}}} + \underbrace{\#(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)}_{\substack{\wedge\!| \text{ Bezout} \\ n_1 \cdot n_2}} = \frac{1}{2}(n_1^2 - 3n_1 + 2 + n_2^2 - n_2 + 2n_1n_2) =$$

$$= \frac{1}{2}((n_1+n_2)^2 - 3n_1 - n_2 + 2)$$

$$= \frac{1}{2}(\underbrace{(n_1+n_2)^2}_{n} - \underbrace{(n_1+n_2)}_{n} + \underbrace{2-2n_1}_{\overset{\wedge\!|}{0}}) \leq \frac{1}{2}(n^2-n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

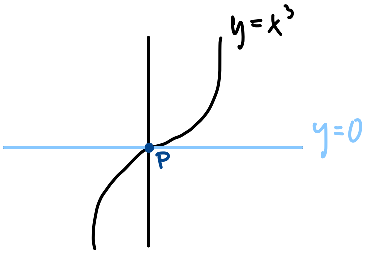
21. 4. 2023

PREVOJI

Definicija: Točka P na krivulji $\mathcal{C}$ je prevoj, če velja:
1) točka P regularna
2) za tangento L v točki P velja $\text{mult}_P(\mathcal{C}\cap L)\geq 3$

Opomba: Ker je $\underline{P\in \text{Reg}(\mathcal{C})}$ je $\underline{\text{ord}_P(\mathcal{C})=1}$.
Za tangento L v P vedno velja $\text{mult}_P(\mathcal{C}\cap L) > \underset{1}{\underset{\|}{\text{ord}_P\mathcal{C}}}$

najmanjša $k\neq 0$ je iz $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ oz. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$



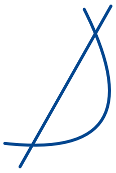
$f(x,y)=x^3-y$ sing točke: $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2=0 \iff x=0$
$\frac{\partial f}{\partial y}=-1\neq 0$

vstavimo enačbo tangente
$f(x,0)=x^3$
Ker $x^3 \mid f(x,0)$ je $\text{mult}_P(\mathcal{C}\cap L)\geq 3$

v reg. točki:
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$
$0-y=0$
$y=0$

Opomba: To delnje tudi za $y=x^4$, kar v analizi ni prevoj, za nas pa je. !

Opomba: Če je $\text{mult}_P\mathcal{C}=\underline{3}$ potem je P pravi prevoj
$=\underline{\infty}$ . . . . nepravi
Sledeči primer pomeni, da je L komponenta od $\mathcal{C}$



Iskanje prevojev po definiciji je komplicirano.
Iščemo računski način.
Pokazali bomo, da je množica rešitev sistema enačb $F(x,y,z)=0$, F homogen
$$\det\begin{bmatrix}F_{xx} & F_{xy} & F_{xz}\\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz}\\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz}\end{bmatrix}=0$$
enaka uniji množice prevojev in množice singularnih točk (od krivulje $F=0$)

$\mathcal{C}=V_h(F)=\{[a:b:c]\mid F(a,b,c)=0\}$

$H(\mathcal{C})=V_h\left(\det\begin{bmatrix}F_{xx} & & \\ & \ddots & \\ & & F_{zz}\end{bmatrix}\right)$ Hessejeva krivulja

$\text{Flex}(\mathcal{C})$ = množica vseh prevojev krivulje $\mathcal{C}$
$\text{Sing}(\mathcal{C})$ = množica vseh singularnih točk krivulje $\mathcal{C}$

Glavni izrek: $\mathcal{C}\cap H(\mathcal{C})=\text{Sing}\,\mathcal{C}\cup \text{Flex}\,\mathcal{C}$

Primer: Poišči vse prevoje na krivulji $y^2z = x^3$

$F = y^2z - x^3$

$F_x = 3x^2$

$F_y = 2yz$

$F_z = y^2$

Kaj so singularne točke?

$3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$

Singularna točka je $[0:0:1]$

Hessejeva matrika je $\begin{bmatrix} -6x & 0 & 0 \\ 0 & 2z & 2y \\ 0 & 2y & 0 \end{bmatrix}$

Njena determinanta je $24xy^2$

Rešiti moramo sistem enačb: $\begin{array}{l} y^2z = x^3 \\ 24xy^2 = 0 \end{array} \Rightarrow x=0$ ali $y = 0$

$y = 0 \overset{y^2z=x^3}{\Downarrow} x = 0$

$x = 0 \overset{y^2z=x^3}{\Downarrow} y=0$ ali $z=0$

$\Rightarrow [x:y:z] = [0:1:0] \leftarrow$ Flex

ali $= [0:0:1] \leftarrow$ singularna

Načrt dokaza glavnega izreka:

$\mathcal{C} = Reg(\mathcal{C}) \cup Sing(\mathcal{C})$

$$\mathcal{C} \cap H(\mathcal{C}) = (Reg(\mathcal{C}) \cup Sing(\mathcal{C})) \cap H(\mathcal{C}) = \underbrace{(Reg(\mathcal{C}) \cap H(\mathcal{C}))}_{\overset{?}{=} Flex(\mathcal{C})} \cup \underbrace{(Sing(\mathcal{C}) \cap H(\mathcal{C}))}_{\overset{?}{=} Sing\,\mathcal{C}}$$

Dokazati moramo: 1) $Sing\,\mathcal{C} \subseteq H(\mathcal{C})$

2) $Reg\,\mathcal{C} \cap H(\mathcal{C}) = Flex(\mathcal{C})$

Preden začnemo računati, poenostavimo Hessejevo determinanto

$$H_F = \begin{bmatrix} F_{xx} & & \\ & \ddots & \\ & & F_{zz} \end{bmatrix}$$

Eulerjeva identiteta

$$\underline{z} \cdot \det H_F = \det \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & \underline{z}F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & \underline{z}F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & \underline{z}F_{zz} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & \overbrace{xF_{xx} + yF_{xy} + zF_{xz}}^{(n-1)F_x} \\ F_{yx} & F_{yy} & (xF_{yx} + yF_{yy} + zF_{yz})\,(n-1)F_y \\ F_{zx} & F_{zy} & \underbrace{xF_{zx} + yF_{zy} + zF_{zz}}_{(n-1)F_z} \end{bmatrix} =$$

$\cdot x$ $\cdot y$

(det se ne spremeni)

$$= (m-1)\det\begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_{zx} & F_{zy} & F_z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow z^2 \det H_F = (m-1)\det\begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ zF_{zx} & zF_{zy} & zF_z \end{bmatrix}\begin{matrix}\cdot x \\ \cdot y \\ \end{matrix} = (m-1)\det\begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ xF_{xx}+yF_{yx}+zF_{zx} & xF_{xy}+yF_{yy}+zF_{zy} & xF_x+yF_y+zF_z \end{bmatrix}$$

$$= (m-1)\det\begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ (m-1)F_x & (m-1)F_y & mF \end{bmatrix} = (m-1)^2\det\begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & \frac{m}{m-1}F \end{bmatrix} \quad (*)$$

Opomba: Hessejeva krivulja $H(C) = V_h(\det H_F)$ je odvisna samo od C, ne pa tudi od izbire koordinatnega sistema.

ideja: Proj. transf. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \xrightarrow{\Phi} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$F(x,y,z)=0 \longrightarrow F(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z,\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z,\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z)=0$$
$$= (G(x,y,z)=0)$$

$$G(x,y,z) = F\left(A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$$

Kratek račun pokaže, da je $\begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ G_{xz} & G_{yz} & G_{zz} \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} A$

$G_x = F_x \cdot a_{11} + F_y a_{21} + F_z a_{31}$

$G_{xx} = (F_{xx} a_{11} + F_{xy} a_{21} + F_{xz} a_{31}) a_{11} + (F_{yx} a_{11} + F_{yy} a_{21} + F_{yz} a_{31}) a_{21} +$ [illegible] F_z

Če vzamemo na obeh straneh determinanto, dobimo

$$\det H_G = \det A^T \cdot \det H_F \cdot \det A \underset{\det A^T = \det A}{\overset{\uparrow}{=}} \det H_F \cdot (\det A)^2$$

$\det A \neq 0$ ker je proj. transf. obrnljiva

Torej je $\underset{(x,y,z)}{\underset{\uparrow}{\det H_G}} = 0 \iff \underset{A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}{\underset{\uparrow}{\det H_F}} = 0$

$$P \in V_h(F) \iff \Phi(P) \in V_h(F \circ \Phi^{-1})$$
$$P \in V_h(\det H_F) \overset{?}{\iff} \Phi(P) \in V_h(\det H_{F\circ\Phi^{-1}})$$
$$\overset{?}{=} \longleftarrow \text{zgornji račun z det.}$$
$$V_h((\det H_F) \circ \Phi^{-1})$$

Dokaz glavnega izreka:

1) $\text{Sing}\, C \subseteq H(C)$

Vzamemo poljubno točko $P \in \text{Sing}\, C$ in jo vstavimo v pomožno formulo $(*)$

$P \in \text{Sing}\, C \Rightarrow F(P) = 0$ in $F_x(P) = F_y(P) = F_z(P) = 0$

$$\Rightarrow (m-1)^2 \det\begin{bmatrix} F_{xx}(P) & F_{xy}(P) & F_x(P)^{=0} \\ F_{xy}(P) & F_{yy}(P) & F_y(P)^{=0} \\ \underbrace{F_x(P)}_{=0} & \underbrace{F_y(P)}_{=0} & \frac{m}{m-1}F(P)^{=0} \end{bmatrix} = 0$$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} z^2 (\det H_F)(P) = 0$ $z =$ tretja komponenta P $\overset{?}{\Rightarrow} (\det H_F)(P) = 0 \Rightarrow P \in H(C)$

z primerno izbiro koordinatnega sistema dosežemo, da je tretja komponenta P neničelna

2) $\underline{\mathrm{Reg}\,\mathcal{C} \cap H(\mathcal{C}) = \mathrm{Flex}(\mathcal{C})}$

Vzamemo poljubno točko $P \in \mathrm{Reg}\,\mathcal{C}$

Naj bo L tangenta na $\mathcal{C}$ v P

S primerno izbiro koordinatnega sistema dosežemo, da je $P=[0:0:1]$ in da ima L enačbo $y=0$

V tem koordinatnem sistemu naj bo enačba krivulje $F=0$.

Kaj lahko povemo o F?

Najprej dehomogeniziramo po $z \longrightarrow F(x,y,1)$

Točka $(0,0)$ je regularna točka od $F(x,y,1)=0$ in enačba tangente v tej točki je $y=0$.

$F(x,y,1)$ nima konstantnega člena (ker $F(P)=0$) ima linearni člen enak y (ker je $y=0$ tangenta)

$F(x,y,1) = y + (ax^2+2bxy+y^2)$ + členi višjih stopenj

$\Rightarrow F(x,y,z) = yz^{n-1} + (ax^2+2bxy+y^2)z^{n-2} + \dots$

$\mathrm{mult}_P(\mathcal{C}\cap L) = 2$

vstavimo enačbo tangente v F

Parametrizacija L $\begin{matrix} x=x \\ y=0 \\ z=z \end{matrix} \xrightarrow[v\ F]{\text{vstavimo}} F(x,0,z)$

glej zapiske 11

Točko $P=[0:0:1]$ dobimo v primeru, ko je $x:z=0:1$

Faktor $F(x,0,z)$, ki ustreza P je torej potenca x.

$\mathrm{mult}_P(\mathcal{C}\cap L)$ = najvišja potenca x, ki deli $F(x,0,z)$

Ker je L tangenta, je $\mathrm{mult}_P(\mathcal{C}\cap L)\geq 2$

$F(x,0,z) = ax^2z^{n-2} + a'x^3z^{n-3}$ očitno $x^2 \mid F(x,0,z)$

P prevoj $\Leftrightarrow$ L je prevojna tangenta $\Leftrightarrow \mathrm{mult}_P(\mathcal{C}\cap L)\geq 3 \Leftrightarrow x^3 \mid F(x,0,z)$ $\boxed{\begin{matrix}\Leftrightarrow x \mid G(x,z) \\ \Leftrightarrow G(0,1)=0\end{matrix}}$

$$\boxed{F(x,y,z) = \underbrace{F(x,0,z)}_{x^2G(x,z)} + \underbrace{F(x,y,z)-F(x,0,z)}_{yH(x,y,z)}}$$

V (∗) vstavimo $F = x^2G(x,z) + yH(x,y,z)$ in potem še $(x,y,z)\longrightarrow(0,0,1)$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= 2xG + x^2G_x + yH_x \longrightarrow F_x(0,0,1)=0 \\ F_y &= H + yH_y \longrightarrow F_y(0,0,1) = H(0,0,1) \\ F_z &= x^2G_z + yH_z \longrightarrow F_z(0,0,1)=0 \end{aligned}\right\}$$

$[0:0:1]\in \mathrm{Reg}\,\mathcal{C}$

$\Rightarrow$ vsaj en parc odvod je neničeln

$\Rightarrow H(0,0,1)\neq 0$

$$F_{xx} = 2G + 2xG_x + 2xG_x + x^2G_{xx} + yH_{xx} \longrightarrow F_{xx}(0,0,1) = 2G(0,1)$$

$$F_{xy} = H_x + yH_{xy} \longrightarrow F_{xy}(0,0,1) = H_x(0,0,1)$$

$$F_{yy} = H_y + H_y + yH_{yy} = 2H_y + yH_{yy} \longrightarrow F_{yy}(0,0,1) = 2H_y(0,0,1)$$

(∗) je torej $1\cdot \det H_F(0,0,1) = (n-1)^2 \det \begin{bmatrix} 2G(0,1) & H_x(0,0,1) & 0 \\ H_x(0,0,1) & 2H_y(0,0,1) & H(0,0,1) \\ 0 & H(0,0,1) & 0 \end{bmatrix} = (n-1)^2(-2G(0,1)H(0,0,1)^2)$

Vemo, da je $P=[0:0:1]$ prevoj $\Leftrightarrow G(0,1)=0$

Ker je $H(0,0,1) \neq 0$, je $G(0,1)=0 \iff \underbrace{-2(n-1)^2\, G(0,1)\, H(0,0,1)^2=0}_{(\det H_F)(0,0,1)=0}$

$$\Updownarrow$$

$$p=[0:0:1]\in H(\mathcal{C})$$

Povzetek: za vsak $p\in \operatorname{Reg}\mathcal{C}$ smo dokazali: $p\in \operatorname{Flex}(\mathcal{C}) \iff p\in H(\mathcal{C})$
Torej je res $\operatorname{Reg}(\mathcal{C})\cap H(\mathcal{C}) = \operatorname{Flex}(\mathcal{C})$

□

OCENA ZA ŠTEVILO PREVOJEV

4. 5. 2023

Naj bo $\mathcal{C}$ projektivna algebraična krivulja
Imamo 2 možnosti:

- $\mathcal{C}$ vsebuje premico
- $\mathcal{C}$ ne vsebuje premice

V 1. primeru ima $\mathcal{C}$ neskončno prevojev, ker je vsaka točka na tej premici nepravi prevoj.

V 2. primeru se izkaže (glej skripto), da $\mathcal{C}$ in $H(\mathcal{C})$ nimata skupne komponente. Torej lahko uporabimo Bezoutov izrek za $\mathcal{C}$ in $H(\mathcal{C})$

$$\sum_{p\in \mathcal{C}\cap H(\mathcal{C})} \operatorname{mult}_p(\mathcal{C}\cap H(\mathcal{C})) = \underset{n}{\underset{\shortparallel}{\deg \mathcal{C}}} \cdot \boxed{\underset{3(n-2)}{\underset{\shortparallel}{\deg H(\mathcal{C})}}} \quad !$$

$\deg F = n$

$\deg \det \begin{bmatrix} F_{xx} & \cdots \\ \cdots & F_{zz} \end{bmatrix} = 3(n-2)$

vsi elementi stopnje $(n-2)$

Vsoto razdelimo na dva dela:
$\mathcal{C}\cap H(\mathcal{C}) = \operatorname{Flex}(\mathcal{C}) \cup \operatorname{Sing}(\mathcal{C})$

$$\sum_{p\in \operatorname{Flex}\mathcal{C}} \operatorname{mult}_p(\mathcal{C}\cap H(\mathcal{C})) + \sum_{p\in \operatorname{Sing}\mathcal{C}} \operatorname{mult}_p(\mathcal{C}\cap H(\mathcal{C})) = 3n(n-2)$$

Uporabimo presečno neenakost:

$$\operatorname{mult}_p(\mathcal{C}\cap H(\mathcal{C})) \geq \underbrace{\operatorname{ord} \mathcal{C}} \cdot \underbrace{\operatorname{ord}_p H(\mathcal{C})}_{\overset{\vee\!\shortparallel}{1}} \geq \begin{cases} 2s & p\in \operatorname{Sing}\mathcal{C} \\ f & p\in \operatorname{Flex} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p \text{ singularna } \Rightarrow \operatorname{ord}\mathcal{C}\geq 2 \\ p \text{ prevoj } \Rightarrow p \text{ regularna } \Rightarrow \operatorname{ord}\mathcal{C}\geq 1 \end{cases}$$

Uvedemo še oznake
f = število prevojev na $\mathcal{C}$ = $\#\operatorname{Flex}\mathcal{C}$
s = število singularnih točk = $\#\operatorname{Sing}\mathcal{C}$

Ocena: $f+2s \leq 3n(n-2)$

PROJEKTIVNE KUBIKE

Kubike so krivulje 3. reda.

Cilj: Klasifikacija kubik do projektivne ekvivalence
spotoma: Weierstrassova in Hessejeva normalna forma

UVOD V WEIERSTRASSOVO NORMALNO FORMO (WNF)

WNF je krivulja oblike $y^2 = x^3 + \alpha x + \beta$
Ker smo v projektivnem, moramo še homogenizirati: $y^2 z = x^3 + \alpha x z^2 + \beta z^3$

Kdaj je WNF nesingularna? nesingularna = nima singularnih točk

Trditev: Naslednje trditve so ekvivalentne:
1) WNF je nesingularna
2) $4\alpha^3 + 27\beta^2 \neq 0$
3) Polinom $x^3 + \alpha x + \beta$ nima večkratnih ničel.

Dokaz: (1 ⇔ 2) Izračunajmo singularne točke od $F = y^2 z - x^3 - \alpha x z^2 - \beta z^3$
Rešiti moramo sistem enačb $F_x = F_y = F_z = 0$

$$0 = F_x \overset{(1)}{=} -3x^2 - \alpha z^2$$
$$0 = F_y \overset{(2)}{=} 2yz$$
$$0 = F_z \overset{(3)}{=} y^2 - 2\alpha x z - 3\beta z^2$$

Obravnavajmo primera $z = 0$ in $z \neq 0$

- Če $z = 0 \Rightarrow$ $0 = -3x^2$, $0 = 0$, $0 = y^2$ $\Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow$ rešitev $(0,0,0)$, ampak to ni projektivna točka

- Če $z \neq 0 \Rightarrow$ $2yz \overset{(2)}{=} 0$
  $y = 0$

$$\left.\begin{aligned} (1):&\ 0 = -3x^2 - \alpha z^2 \\ (3):&\ 0 = -2\alpha x z - 3\beta z^2 \end{aligned}\right\}$$ Rešimo ta sistem

Ker je $z \neq 0$, lahko drugo enačbo okrajšamo:

$$0 = -2\alpha x - 3\beta z$$
$$(2\alpha x)^2 = (-3\beta z)^2$$
$$4\alpha^2 x^2 = 9\beta^2 z^2 \quad /\cdot 3$$

$(1): 3x^2 = -\alpha z^2 \hookrightarrow$

$$4\alpha^2\, 3x^2 = 27\beta^2 z^2$$
$$4\alpha^2 \cdot (-\alpha z^2) = 27\beta^2 z^2$$
$$-4\alpha^3 z^2 = 27\beta^2 z^2 \quad /\cdot z^2 \ (\text{ker } z\neq 0)$$
$$-4\alpha^3 = 27\beta^2$$

če imamo singularno točko na $\mathcal{C}$, potem je $4\alpha^3 + 27\beta^2 = 0$
Dokaz velja tudi v drugo smer.

(2 <=> 3) $f := x^3 + \alpha x + \beta$

f ima večkratno ničlo

<=> f in f' imata skupen faktor

<=> $\operatorname{Res}(f, f') = 0$

$$\operatorname{Res}(f,f') = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha & \beta & \\ & 1 & 0 & \alpha & \beta \\ 3 & 0 & \alpha & & \\ & 3 & 0 & \alpha & \\ & & 3 & 0 & \alpha \end{bmatrix} = \dots = 4\alpha^3 + 27\beta^2$$

GLAVNI IZREK O WNF

Radi bi pokazali:

Glavni izrek: Vsaka nesingularna kubika je projektivno ekvivalentna neki WNF

Od tod ne sledi, da so vse proj. kubike proj. ekvivalente. Niti 2 različni WNF nista nujno proj. ekvivalentni

S tem klasifikacija še ni končana, ker dve različni WNF nista nujno projektivno ekvivalentni.

Za DN:
$$y^2z = x^3 + \alpha_1 xz^2 + \beta_1 z^3$$
$$y^2z = x^3 + \alpha_2 xz^2 + \beta_2 z^3$$
sta projektivno ekvivalentni <=>

$$\Longleftrightarrow \frac{4\alpha_1^3}{4\alpha_1^3 + 27\beta_1^2} = \frac{4\alpha_2^3}{4\alpha_2^3 + 27\beta_2^2}$$

Ta ekvivalenca in glavni izrek nam data klasifikacijo projektivnih kubik do proj. ekvivalence

Dokaz: Nesingularna kubika je nerazcepna. (presek komponent bi bila singularnost)

① Nesingularna kubika ima vsaj en prevoj: $\mathcal{C} \cap H(\mathcal{C}) = \operatorname{Flex}\mathcal{C} \cup \underbrace{\operatorname{Sing}\mathcal{C}}_{=\emptyset}$

1. korak

Zakaj je $\mathcal{C} \cap H(\mathcal{C})$ neprazno? Iz Bezoutovega izreka

$\mathcal{C} \subseteq H(\mathcal{C}) \Rightarrow$ presek je $\mathcal{C}$, ta pravi $\neq \emptyset$

$\mathcal{C} \nsubseteq H(\mathcal{C}) \xRightarrow{\mathcal{C}\text{ nerazcep.}} \mathcal{C}$ in $H(\mathcal{C})$ nimata skupne komponente. Torej lahko uporabimo Bezoutov izrek:

$$\sum_{p \in \mathcal{C} \cap H(\mathcal{C})} \operatorname{mult}_p(\mathcal{C} \cap H(\mathcal{C})) = 3n(n-2)$$
$$\uparrow$$

ta sumand $\neq 0$
$\Rightarrow$ vsaj ena točka je v preseku

② Primerno izberemo koordinatni sistem.

Prevoj je v točki $[0:1:0]$

Tangenta v prevoju je $z=0$

Kakšna je enačba kubike v novem koordinatnem sistemu?

Splošna enačba kubike je

$$0 = ax^3 + by^3 + cz^3 + dx^2y + exy^2 + fz^2x + gzx^2 + hyz^2 + iy^2z + jxyz$$

Ker gre kubika skozi $(0,1,0)$ je $b=0$.

Vemo, da je presečna večkratnost te kubike s premico $z=0$ v točki $[0:1:0] \geq 3$

Vstavimo v enačbo kubike $z=0$.

$0 = ax^3 + by^3 + dx^2y + exy^2$ Ker je ta premica prevojna tangenta mora biti presečna večkratnost vsaj 3. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ To mora imeti $[0:1]$ za trojno ničlo. $0 = x(ax^2 + dxy + ey^2)$ → bi bil x samo enojna ničla

$0 = ax^3$

Od tod sledi $b=d=e=0$, $a \neq 0$

$0 = ax^3 + cz^3 + fz^2x + gzx^2 + hyz^2 + iy^2z + jxyz$

③ Preuredimo člene, ki vsebujejo y:

dopolnimo do popolnega kvadrata

$$hyz^2 + iy^2z + jxyz = iz\left(y^2 + \frac{h}{i}yz + \frac{j}{i}xy\right) = iz\left(y^2 + \left(\frac{h}{i}z + \frac{j}{i}x\right)y\right) =$$

$$= iz\left(\underbrace{y + \frac{h}{2i}z + \frac{j}{2i}x}_{y'}\right)^2 - \left(\frac{h}{2i}z + \frac{j}{2i}x\right)^2\Big) = izy'^2 - iz\left(\frac{h}{2i}z + \frac{j}{2i}x\right)^2$$

Naredimo proj. transformacijo: $(x,y,z) \longrightarrow (x',y',z')$, kjer $x'=x$, $y'=y+\frac{h}{2i}z + \frac{j}{2i}x$, $z=z'$

$$0 = ax^3 + cz^3 + fz^2x + gzx^2 + izy'^2 - iz\left(\frac{h^2z^2}{4i^2} + \frac{j^2x^2}{4i^2} - \frac{hj}{2i^2}zx\right)$$

$$0 = \left(c - \frac{h^2}{4i}\right)z^3 + \left(f + \frac{hj}{2i}\right)z^2x + \left(g - \frac{j^2}{4i}\right)zx^2 + ax^3 + izy'^2$$

$$y'^2z = \underbrace{-\frac{1}{i}\left(c - \frac{h^2}{4i}\right)}_{D}z^3 + \underbrace{\frac{-1}{i}\left(f + \frac{hj}{2i}\right)}_{C}z^2x + \underbrace{\frac{-1}{i}\left(g - \frac{j^2}{4i}\right)}_{B}zx^2 - \underbrace{\frac{a}{i}}_{A}x^3 \quad -\frac{a}{i} \neq 0$$

$$y'^2z = Ax^3 + Bx^2z + Cxz^2 + Dz^3$$

$x \to x$
$y \to y'$
$z \to z$

④ Utemeljimo $a \neq 0$, $i \neq 0$

$$F = ax^3 + \underbrace{cz^3 + fz^2x + gzx^2 + hy^2z + iy^2z + jxyz}_{\text{so deljivi z } z} \quad (b=d=e=0)$$

- $a=0 \Rightarrow z \mid F$ → protislovje z nerazcepnostjo F $\Rightarrow a \neq 0$

- $i \neq 0$: V dokazu upoštevajmo, da je prevojna točka $[0:1:0]$ regularna.

$F_x = 3ax^2 + fz^2 + 2gzx + jyz$
$F_y = hz^2 + 2iyz + jxz$
$F_z = 3cz^2 + 2fzx + gx^2 + 2hyz + iy^2 + jxy$

$\Rightarrow F_x(0,1,0) = 0$
$\Rightarrow F_y(0,1,0) = 0$
$\Rightarrow F_z(0,1,0) = i$ ← ta mora biti $\neq 0$

y' si rešimo tako, da spremenimo koordinatni sistem:

$x \to x$
$y \to y'$
$z \to z$

Tako y' postane y.

⑤ Imamo $y^2z = Ax^3 + Bx^2z + Cxz^2 + Dz^3$

S primerno $\underline{\overset{\text{proj. transf.}}{\text{zamenjavo}}}$ dokažemo $A = 1$

$$x' = \sqrt[3]{A}\,x \,, \quad y' = y \,, \quad z' = z$$

$$y^2z = \underline{x^3 + Bx^2z} + Cxz^2 + Dz^3$$

S primerno zamenjavo dosežemo $B = 0$

<u>(Prva dva člena dopolnimo do popolnega kuba)</u>

$$\left(x + \frac{B}{3}z\right)^3 = \underline{x^3} + \underline{\cancel{3}x^2 \frac{B}{\cancel{3}} z} + 3x\left(\frac{B}{3}z\right)^2 + \left(\frac{B}{3}z\right)^3$$

$$y^2z = \left(x + \frac{B}{3}z\right)^3 - \frac{B^2}{3}xz^2 - \frac{B^3}{27}z^3 + Cxz^2 + Dz^3 =$$

$$= \underbrace{\left(x + \frac{B}{3}z\right)}_{x'}{}^3 + \left(C - \frac{B}{3}\right)^2 \underset{\overset{\uparrow}{x' - \frac{B}{3}z}}{x} z^2 + \left(D - \frac{B^3}{27}\right)z^3$$

$$= x'^3 + \alpha x' z^2 + \beta z^3 \qquad \square$$

12. 5. 2023

UVOD V HESSEJEVO NORMALNO FORMO

To je kubika oblike $x^3+y^3+z^3 = 3\alpha xyz$ oz. $\mu(x^3+y^3+z^3)+3\lambda xyz=0$

Kdaj je nesingularna?
Kaj so njeni prevoji?

$$F=\mu(x^3+y^3+z^3)+3\lambda xyz$$

$$F_x = 3\mu x^2 + 3\lambda yz = 0 \Rightarrow \mu x^2 = -\lambda yz$$

$$F_y = 3\mu y^2 + 3\lambda xz = 0 \Rightarrow \mu y^2 = -\lambda xz$$

$$F_z = 3\mu z^2 + 3\lambda xy = 0 \Rightarrow \mu z^2 = -\lambda xy$$

$$\left.\begin{aligned}\mu x^2 &= -\lambda yz\\ \mu y^2 &= -\lambda xz\\ \mu z^2 &= -\lambda xy\end{aligned}\right\}*$$

$$\mu^3x^2y^2z^2 = -\lambda^3x^2y^2z^2$$

$$(\mu^3+\lambda^3)x^2y^2z^2=0$$

1) $\mu^3+\lambda^3\neq 0 \Rightarrow x^2y^2z^2=0 \Rightarrow x=0$ ali $y=0$ ali $z=0$

$$\xRightarrow{(*)} \mu x^2=\mu y^2=\mu z^2=0$$

- $\mu\neq 0$: $x^2=y^2=z^2=0 \Rightarrow x=y=0$

  Povzetek: če je $\mu^3+\lambda^3\neq 0$ in $\mu\neq 0$, potem je krivulja $F=0$ nesingularna

- $\mu=0$: $F=3\lambda xyz \Rightarrow$ F je razcepna, torej tudi singularna

  $[1:0:0]$, $[0:1:0]$, $[0:0:1]$ so sing. točke v tem primeru

2) $\left.\begin{aligned}\mu^3+\lambda^3&=0\\ \mu&\neq 0\end{aligned}\right\}$ $F=\mu(x^3+y^3+z^3-3\alpha xyz)$

označimo $\alpha=-\frac{\lambda}{\mu}$ in $\alpha^3=1$

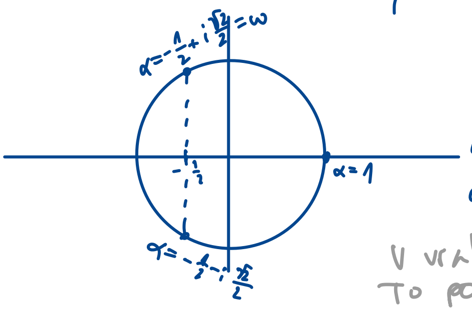
$$\alpha^3-1=0 \Rightarrow \alpha^3-1=\frac{-\lambda^3}{\mu^3}-1=\frac{-\lambda^3-\mu^3}{\mu^3}=0$$

$$\alpha^3=1 \longrightarrow \alpha=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3},\ k\in\{0,1,2\}$$

k=0

k=1

k=2



$\alpha=\omega^0=1$

ali $\alpha=\omega^1=\omega=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ali $\alpha=\omega^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

V vsakem od teh treh primerov imamo po 3 singularnosti.
To pomeni, da kubika razpade na 3 premice

$\alpha=1$: $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x+\omega^2y+\omega z)(x+\omega y+\omega^2z)$

$\alpha=\omega$: $x^3+y^3+z^3-3\omega xyz=$ zamenjaj $x\to x\omega$

$\alpha=\omega^2$: . . .

Povzetek: če je $\mu=0$ ali $\mu^3+\lambda^3=0$, potem je krivulja $F=0$ razcepna, torej je singularna.

Povzetek: nesing. $\Leftrightarrow \mu^3+\lambda^3\neq 0 \wedge \mu\neq 0$. F delimo z μ: $x^3+y^3+z^3+3\alpha xyz=0$
$\alpha^3\neq 1$

Izračunaj prevoje v nesingularnem primeru

$$\mathcal{C} \cap H(\mathcal{C}) = \text{Flex}\,\mathcal{C} \cup \underbrace{\text{Sing}\,\mathcal{C}}_{\overset{\shortparallel}{0}}$$

$$F = \mu(x^3+y^3+z^3) + 3\lambda xyz$$
$$F_x = 3\mu x^2 + 3\lambda yz$$
$$F_y = 3\mu y^2 + 3\lambda xz$$
$$F_z = 3\mu z^2 + 3\lambda xy$$

$$\det\begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{xy} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{xz} & F_{yz} & F_{zz} \end{bmatrix} = \det\begin{vmatrix} 6\mu x & 3\lambda z & 3\lambda y \\ 3\lambda z & 6\mu y & 3\lambda x \\ 3\lambda y & 3\lambda x & 6\mu z \end{vmatrix} =$$

$$= 6^3\mu^3 xyz + 27\lambda xyz + 27\lambda^3 xyz - 54\lambda^2\mu y^3 - 54\lambda^2\mu x^3 - 54\lambda^2\mu z^3 =$$
$$= (216\mu^3 + 54\lambda^3)\,xyz - 54\lambda^2\mu(x^3+y^3+z^3)$$

$\mathcal{C} \cap H(\mathcal{C})$

$$\mu(x^3+y^3+z^3) + 3\lambda xyz = 0$$
$$-54\lambda^2\mu(x^3+y^3+z^3) + (216\mu^3 + 54\lambda^3)\,xyz = 0$$

V matričnem zapisu:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mu & 3\lambda \\ -54\lambda^2\mu & 216\mu^3+54\lambda^3 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} x^3+y^3+z^3 \\ xyz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det = \mu(216\mu^3+54\lambda^3) + 162\lambda^3\mu = 216\mu^4 + \underbrace{54\mu\lambda^3 + 162\mu\lambda^3}_{216\mu\lambda^3} = 216\mu(\mu^3+\lambda^3)$$

Ker smo v nesingularnem primeru je $\mu \neq 0$ in $\mu^3+\lambda^3 \neq 0$, torej je $\det \neq 0$. Torej ima sistem $(**)$ samo trivialno rešitev $x^3+y^3+z^3=0$ in $xyz=0$.

$$\Downarrow$$
$x=0$ ali $y=0$ ali $z=0$

$$x=0 \Rightarrow y^3+z^3=0 \Rightarrow z^3=-y^3 \Rightarrow z=-y \text{ ali } z=-wy \text{ ali } z=-w^2y$$

$$\Rightarrow (x,y,z) = (0,y,-y) \text{ ali } (0,y,-wy) \text{ ali } (0,y,-w^2y)$$
$$\Rightarrow [x:y:z] = [0:1:-1] \text{ ali } [0:1:-w] \text{ ali } [0:1:-w^2]$$

(oz. $[x:y:z]$ ali $[0:-1:1]$ ali $[0:-w:1]$ ali $[0:-w^2:1]$ če obrnemo y in z)

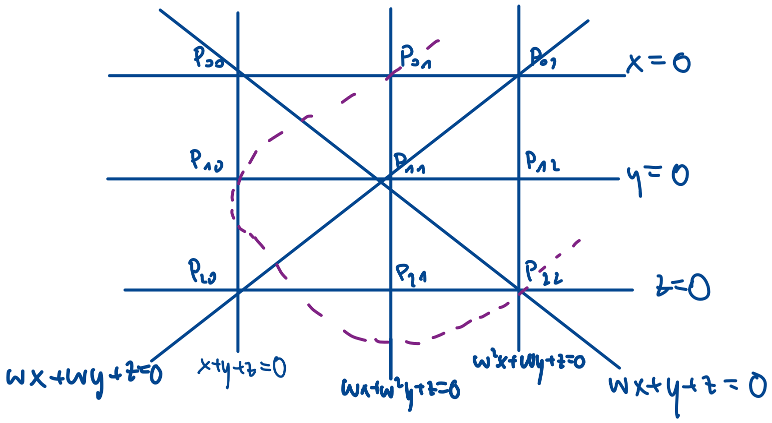
← tu smo napisali tam zato ker je v zapiskih tko

Podobno dobimo ko $y=0$ ali $z=0$ ⇒ skupaj 9 prevojev.

$$P_{00} = [0:-1:1] \qquad P_{01} = [0:-w:1] \qquad P_{02} = [0:-w^2:1]$$
$$P_{10} = [1:0:-1] \qquad P_{11} = [1:0:-w] \qquad P_{12} = [1:0:-w^2]$$
$$P_{20} = [-1:1:0] \qquad P_{21} = [-w:1:0] \qquad P_{22} = [-w^2:1:0]$$

Naš cilj je pokazati, da ti prevoji zadoščajo naslednji lastnosti:
Vsaka premica, ki gre skozi dva prevoja, gre poleg tega skozi še natanko en prevoj.

Def. Množica točk s tako lastnostjo pravimo konfiguracija 9 točk.



(in poglejmo π, če ležijo na tej premici)

P_{01}, P_{10}, P_{22} ležijo na $x+w^2y+z=0$
P_{02}, P_{10}, P_{21} ležijo na $x+wy+z=0$
P_{00}, P_{12}, P_{21} ležijo na $w^2x+y+z=0$
P_{01}, P_{12}, P_{20} ležijo na $x+y+wz=0$

ki gre skozi standardno konfiguracijo 9 točk

Napoved: Vsaka nesingularna kubika je projektivno ekvivalentna Hessejevi normalni formi (HNR)

Načrt dokaza:

1) Vsaka nesingularna kubika ima 9 prevojev
2) Teh 9 prevojev tvori konf 9 točk
3) Poljubni dve konfiguraciji 9 točk sta proj. ekvivalentni.
4) Edina nesingularna kubika, ki gre skozi standardno konfiguracijo je (HNR)

Prevoji na nesingularni kubiki

Radi bi dokazali, da ima vsaka nesingularna kubika natanko 9 prevojev. Ker je vsaka nesing. kubika proj. ekv. WNR zadošča to dokazati za WNR.

Izrek: Vsaka nesingularna na WNF ima natanko 9 prevojev.

Dokaz: Nesingularna na WNF je oblike $y^2z=x^3+\alpha xz^2+\beta z^3$, $4\alpha^3+27\beta^2\neq0$

$F=y^2z-x^3-\alpha xz^2-\beta z^3$

Uporabimo: $\mathcal{C}\cap H(\mathcal{C})=\operatorname{Flex}\mathcal{C}\cup\underset{\substack{\| \\ \emptyset}}{\underbrace{\operatorname{Sing}\mathcal{C}}}$

$F_x=-3x^2-\alpha z^2$
$F_y=2yz$
$F_z=y^2-2\alpha xz-3\beta z^2$

$$\det\begin{bmatrix}F_{xx} & F_{xy} & F_{xz}\\ F_{xy} & F_{yy} & F_{yz}\\ F_{xz} & F_{yz} & F_{zz}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}-6x & 0 & -2\alpha z\\ 0 & 2z & 2y\\ -2\alpha z & 2y & -2\alpha x-6\beta z\end{bmatrix}=6x\cdot2z\cdot(2\alpha x+6\beta z)-8\alpha^2z^3+24xy^2=$$

$$=24\alpha x^2z+72\beta xz^2-8\alpha z^3+24xy^2=24\left(\alpha x^2z+3\beta xz^2-\frac{1}{3}\alpha z^3+xy^2\right)$$

Rešiti moramo sistem enačb $F=0$, $\det H_F=0$

1. možnost: $z=0 \xRightarrow{F=0} x=0$
To reši tudi $\det H_F=0$
Edina rešitev je torej $[0:1:0]$

2. možnost: $z\neq 0$. Lahko predpostavimo $z=1$.
$\xRightarrow{WNF} y^2=x^3+\alpha x+\beta$
To vstavimo v $\det H_F=0$, ki pravi

$$0=\alpha x^2 z+3\beta x z^2-\frac{1}{3}\alpha^2 z^3+xy^2=$$
$$=\alpha x^2 \underset{\overset{\parallel}{1}}{z}+3\beta x \underset{\overset{\parallel}{1}}{z^2}-\frac{1}{3}\alpha^2 z^3+x(x^3+\alpha x+\beta)$$
$$=x^4+2\alpha x^2+4\beta x-\frac{4}{3}\alpha^2$$

Pokazati moramo:
- da ima ta enačba 4 različne rešitve
- vsaki rešitvi po x ustrezata 2 različna y

To nam da skupaj 8 rešitev.

$$g=x^4+2\alpha x^2+4\beta x-\frac{1}{3}\alpha^2$$
$$g'=4x^3+4\alpha x+4\beta=4(x^3+\alpha x+\beta)$$

Pokazati moramo, da g in g' nimata skupne ničle.
(To reši oba problema)

Izračunajmo rezultanto g in $g'/4$

$$\operatorname{Res}\left(g,\frac{g'}{4}\right)=\det\begin{bmatrix}1&0&2\alpha&4\beta&-\frac{1}{3}\alpha^2&&\\&1&0&2\alpha&4\beta&-\frac{1}{3}\alpha^2&\\&&1&0&2\alpha&4\beta&-\frac{1}{3}\alpha^2\\1&0&\alpha&\beta&&&\\&1&0&\alpha&\beta&&\\&&1&0&\alpha&\beta&\\&&&1&0&\alpha&\beta\end{bmatrix}=\ldots=-\frac{1}{27}(4\alpha^3+27\beta^2)^2\neq 0$$

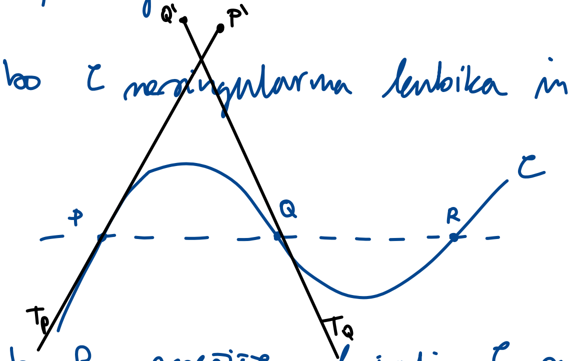
WNR nesingularna
$\Leftrightarrow 4\alpha^3+27\beta^2\neq 0$

19.5. 2023

Izrek: Prevoji na nesingularni kubiki tvorijo konfiguracijo 9 točk.

Ponovimo def. konfiguracije 9 točk:
Vsaka premica, ki gre skozi dve izmed teh 9 točk, gre še skozi natanko eno točko.

Dokaz: Naj bo $\mathcal{C}$ nesingularna kubika in naj bosta P in Q prevoja na $\mathcal{C}$.



Naj bo R presečišče krivulje $\mathcal{C}$ s premico, ki gre skozi P in Q.
Trdimo, da je R prevoj.
Najprej primerno izberemo koordinatni sistem.
T_P tangenta skozi P, $P' \in T_P \setminus T_Q$, $P' \neq P$
T_Q tangenta skozi Q, $Q' \in T_Q \setminus T_P$, $Q' \neq Q$

Opazimo, da so točke P, Q, P', Q' v splošni legi (= nobene tri od njih ne ležijo na isti premici. Opazimo, da so tudi točke $[0:1:0], [0:0:1], [1:1:0], [1:0:1]$ v splošni legi. Kako to dokažemo? z determinantami

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \qquad \det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0 \qquad \det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0 \qquad \det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

Po lemi o 4 točkah, obstaja taka projektivna transformacija, ki

$P \longmapsto [0:1:0]$ $\qquad T_P \longmapsto z=0$
$Q \longmapsto [0:0:1]$ $\qquad T_Q \longmapsto y=0$
$P' \longmapsto [1:1:0]$
$Q' \longmapsto [1:0:1]$

Kam se preslikata tangenti T_P in T_Q?
T_P skozi $P, P' \to$ preslikava T_P skozi $[0:1:0]$ in $[1:1:0]$

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{bmatrix} = z = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{bmatrix} = y = 0$$

Poiščimo enačbo kubike v novih koordinatah:
nastavek $F = ax^3 + by^3 + cz^3 + dx^2y + exy^2 + fz^2x + gzx^2 + hz^2y + izy^2 + jxyz$

Upoštevamo: $z=0$ je prevojna tangenta v $[0:1:0]$
$y=0$ je prevojna tangenta v $[0:0:1]$

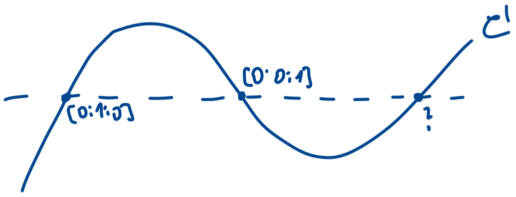
Pozor!: Prevojna tangenta ima presečno večkratnost s $\mathcal{C}$ vsaj 3.

$F(x,y,0)$ mora imeti trojno ničlo v $[0:1]$, $x^3 | F(x,y,0)$
$F(x,0,z)$ mora imeti trojno ničlo v $[0:1]$, $x^3 | F(x,0,z)$

$F(x,y,0) = ax^3 + by^3 + dx^2y + exy^2$ $\qquad x^3 | F(x,y,0) \Rightarrow b = d = e = 0$

$F(x,0,z) = ax^3 + cz^3 + fz^2x + gzx^2$ $\qquad x^3 | F(x,0,z) \Rightarrow c = f = g = 0$

Ostane: $F = ax^3 + hz^2y + izy^2 + jxyz$



Premica, ki gre skozi predikana P in Q je $0 = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{bmatrix} = x$

Presečišče med predikano premico $x=0$ in predikano krivuljo $F=0$ je
Vstavi $x=0$ v $F=0$ in dobiš $hz^2y + izy^2 = 0$
$zy(hz + iy) = 0$
$\Rightarrow z = 0$ ali $y = 0$ ali $hz + iy = 0$

1) $z = 0 \Rightarrow R' = [x:y:z] = [0:y:0] = [0:1:0] = P'$ //
2) $y = 0 \Rightarrow R' = [x:y:z] = [0:0:z] = [0:0:1] = Q'$ //
3) $hz + iy = 0 \Rightarrow R' = [x:y:z] = [0:h:-i]$
$hz = -iy$
$-\frac{h}{i} = \frac{y}{z}$

Dokazati moramo, da je R' prevoj

$$\underset{\substack{\Downarrow \\ R'}}{C'} \cap H(C') = \mathrm{Flex}(C') \cup \underset{\substack{\| \\ \emptyset}}{\mathrm{Sing}(C')}$$

Zakaj $R' \in H(C')$?

$F_x = 3ax^2 + jyz$
$F_y = hz^2 + 2izy + jxz$
$F_z = 2hzy + iy^2 + jxy$

$$\det \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{xy} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{xz} & F_{yz} & F_{zz} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 6ax & jz & jy \\ jz & 2iz & 2hz + 2iy + jx \\ jy & 2hz + 2iy + jx & 2hy \end{bmatrix}$$

Vstavimo točko $[0:h:-i]$ in dobimo

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -ji & jh \\ -ji & -2i^2 & \cancel{-2hi + 2ih + 0} \; 0 \\ jh & 0 & 2h^2 \end{bmatrix} = -(-ji)^2 \cdot 2h^2 - jh(-2i^2)jh = -2i^2j^2h^2 + 2i^2j^2h^2 = 0$$

$\Rightarrow R'$ je res prevoj ✓

Prevoji na nesing. kubiki tvorijo konfiguracijo 9 točk. □

Prevoji na HNF tudi tvorijo konfiguracijo 9 točk (= standardna konf. 9 točk:
$[0:-w^k:1], [1:0:-w^k], [-w^k:1:0]; k=0,1,2)$

3) Poljubni dve konf. 9 točk sta proj. ekv.

Radi bi dokazali, da sta ti dve konfiguraciji 9 točk projektivno ekvivalentni. Dokazali bomo, da sta obe projektivno ekvivalentni tretji konf. 9 točk in sicer:

$$\begin{array}{lll}
S_{00}=[-1:1:1] & S_{01}=[\alpha:1:1] & S_{02}=[1:1:1] \\
S_{10}=[-1:\alpha:1] & S_{11}=[0:0:1] & S_{12}=[1:-\alpha:1] \\
S_{20}\ [-1:-1:1] & S_{21}=[-\alpha:-1:1] & S_{22}=[1:-1:1]
\end{array}$$

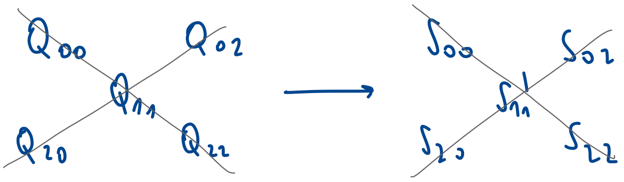
Naj bo Q_{ij} poljubna konf. 9 točk. Iščemo projektivno ekvivalenco med Q_{ij} in S_{ij}.
Najprej opazimo, da so $Q_{00}, Q_{02}, Q_{20}, Q_{22}$ v splošni legi

$$\begin{array}{cccc} Q_{00}, & Q_{02}, & Q_{20}, & Q_{22} \\ \downarrow{\scriptstyle\text{lema o 4 točkah}} & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ S_{00}, & S_{02}, & S_{20}, & S_{22} \end{array}$$

$S_{00}, S_{02}, S_{20}, S_{22}$ v splošni legi

Dokazati moramo, da se tudi ostalih 5 točk primerno preslika.

$Q_{ij} \longrightarrow S_{ij}$ Zakaj je $S'_{ij} = S_{ij}$ za vse i,j.

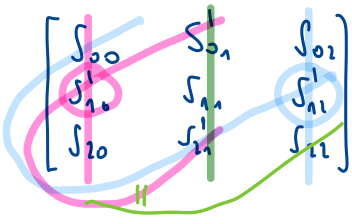


Zakaj je $S'_{11} = S_{11}$?

S'_{11} leži na presečišču med
- premico skozi S_{00}, S_{22} * $y=-x$
- premico skozi S_{02}, S_{20} podobno $y=x$

$$* \det\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ x & y & z \end{bmatrix} = z+x+y-(-x)-(-y)-z = 2x+2y \Rightarrow y=-x$$

Presečišče teh premic je $x=0, y=0$. Se pravi $[0:0:z]=[0:0:1]$



označimo to z α

drug α, še ne vemo koliko je

Premica skozi S_{00} in S_{02} je $y=z$ $\Rightarrow S'_{01}=[\alpha:\beta:\beta]=[\boxed{\frac{\alpha}{\beta}}:1:1]=[\alpha:1:1]$

S_{20} in S_{22} je $y=-z$ $\Rightarrow S'_{21}=[\gamma:-\delta:\delta]=[\frac{\gamma}{\delta}:-1:1]=[-\alpha:1.1]$

Ker S'_{01}, S_{11}, S'_{21} ležijo na isti premici je $0=\det\begin{bmatrix}\alpha&\beta&\beta\\0&0&1\\\gamma&-\delta&\delta\end{bmatrix}=0-\beta\gamma+\alpha\delta=\alpha\delta-\beta\gamma$ (!)

$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=0$

$[\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{\gamma}{\delta}$

Zakaj $\beta\neq0$ in $\delta\neq0$? $\beta=0\xRightarrow{(!)}\alpha\delta=0$

$\beta=0 \Downarrow \alpha\neq0\Rightarrow\delta=0$

$\Rightarrow S'_{01}=[1:0:0]$, $S'_{21}=[1:0:0]$ To je ✗ z $S'_{01}\neq S'_{21}$

Točka S'_{10} leži na presečišču
- premice skozi S_{00} in S_{20}: $x=-z$
- premice skozi S'_{01} in S_{22}: $2x+(1-\alpha)y-(\alpha+1)z=0$

$$-2z+(1-\alpha)y-(\alpha+1)z=0$$
$$(1-\alpha)y-(\alpha+\beta)z=0$$
$$z=\frac{1-\alpha}{\alpha+\beta}y$$

$$S'_{10}=[\underset{\substack{\| \\ -z \\ \| \\ -\frac{1-\alpha}{\alpha+\beta}y}}{x}:y:\underset{\substack{\| \\ \frac{1-\alpha}{\alpha+\beta}y}}{z}]=[-\frac{(1-\alpha)}{\alpha+\beta}:1:\frac{1-\alpha}{\alpha+\beta}]=[1-\alpha:\alpha+\beta:1-\alpha]$$

Točka S'_{12} leži na presečišču:
- premice skozi S_{02} in S_{22}: $x=z$
- premice skozi S_{00} in S'_{21}: $2x-(\alpha+1)y-(\alpha-1)z=0$

Presečišče teh dveh premic:
$S'_{12}=[\alpha+1:-\alpha+\beta:\alpha+1]$

$\begin{bmatrix}S_{00}&S'_{01}&S_{02}\\S'_{10}&S_{11}&S'_{12}\\S_{20}&S'_{21}&S_{22}\end{bmatrix}$ pokazati moramo še, da te tri točke ležijo na isti premici

Ker S'_{10}, S_{11} in S'_{12} ležijo na isti premici je

$$0=\det\begin{bmatrix}\alpha-1&\alpha+\beta&1-\alpha\\0&0&1\\\alpha+1&-\alpha+\beta&\alpha+1\end{bmatrix}=(\alpha+\beta)(\alpha+1)-(\alpha-1)(-\alpha+\beta)=\alpha^2+3\alpha+\alpha+3+\alpha^2-3\alpha-\alpha+3=$$
$$=2(\alpha^2+3)$$

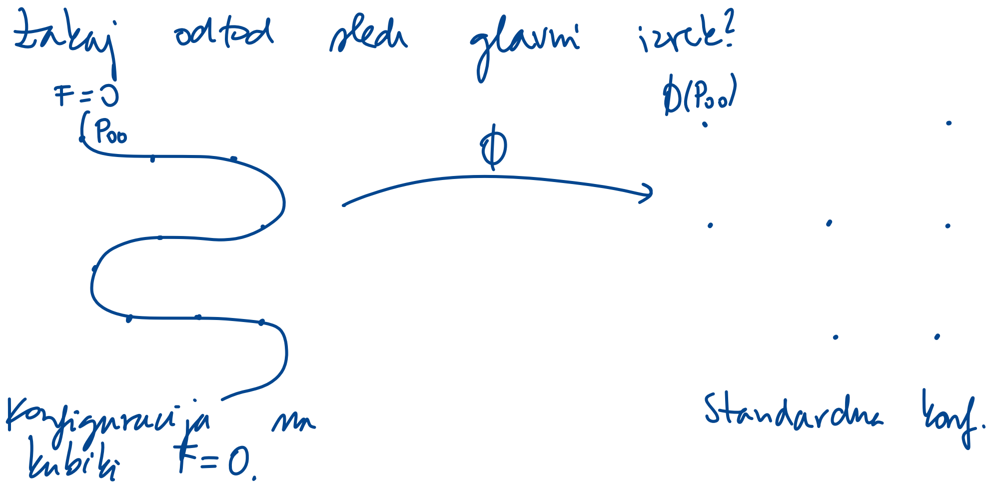
Torej je res $\alpha=\sqrt{-3}$

$\sqrt{-3}$ ima dva "korena":
$[x:y:z]\longrightarrow[-y:-x:z]$ pošlje točko z $\alpha=i\sqrt{3}$ v točko z $\alpha=-i\sqrt{3}$

26. 5. 2023

Trditev: Edina kubika, ki gre skozi standardno konf. 9 točk je HNF.

Zakaj odtod sledi glavni izrek?



$F(P_\infty)=0$
$\Rightarrow (F\circ\Phi^{-1})(\Phi(P_\infty))=0$
Kubika $F\circ\Phi^{-1}$ bo šla skozi standardno konf. 9 točk in bo zato enaka HNF.

Dokaz trditve:

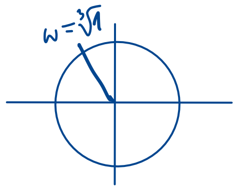
stand. konf. 9 točk: za $k=0,1,2$

$[0:-w^k:1]$, $[1:0:-w^k]$, $[-w^k:1:0]$

Splošna oblika kubike je:

$$\underset{\overset{\parallel}{c}}{a}x^3+\underset{\overset{\parallel}{a}}{b}y^3+\underset{\overset{\parallel}{b}}{c}z^3+\underset{\overset{\parallel}{0}}{d}x^2y+\underset{\overset{\parallel}{0}}{e}xy^2+\overset{\underset{\parallel}{0}}{f}y^2z+\overset{\underset{\parallel}{0}}{g}yz^2+\overset{\underset{\parallel}{0}}{h}z^2x+\overset{\underset{\parallel}{0}}{i}zx^2+jxyz$$

Vstavimo $[0:-w^k:1]$



$$0+b\cdot 1+c\cdot 1+0+0+f(-w^k)^2\cdot 1+g(-w^k)\cdot 1^2+0+0+0=0$$
$$b+c+fw^k-gw^k=0 \quad \text{za } k=0,1,2$$

Te tri enačbe seštejemo in dobimo:

$$3(-b+c)+f\underbrace{(1+w^2+\overset{\overset{w}{\parallel}}{w^k})}_{0}-g\underbrace{(1+w+w^2)}_{0}=0$$

$$0=w^3-1=\underbrace{(w-1)}_{\neq 0}(w^2+w+1)$$

$\rightarrow$ torej je to 0

Torej je ostane $-b+c=0 \Rightarrow c=b$

$fw^{2k}-gw^k=0 \qquad k=0,1,2$

$fw^k-g=0$

$$\left.\begin{aligned}f-g&=0\\ fw-g&=0\\ fw^2-g&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow f=g=0 \qquad \Longrightarrow$$

Vstavimo $[1:0:-w^k]$

$$a+0-c+0+0+0+0+h(-w^k)^2\cdot 1+i(-w^k)\cdot 1^2+0=0$$

Sešteješ vse tri primere $k=0,1,2$

$a-c=0$

Odtod sledi $h=i=0 \qquad \Rightarrow$

Podobno velja za zadnje tri točke $\Longrightarrow$

Povzetek: Edina kubika, ki gre skozi stand. konf. 9 točk je

$$a(x^3+y^3+z^3) + f\, xyz = 0$$

To je ravno HNF ☐

SINGULARNE NERAZCEPNE KUBIKE

Koliko singularnih točk ima lahko nerazcepna kubika?

$$\le \frac{(n-1)(n-2)}{2} \overset{n=3}{=} 1$$

singularna nerazcepna kubika ima natanko eno singularno točko.

Koliko je red te točke?

singularna točka je $\underline{\text{reda } 2}$ (eliminiramo ostale možnosti)

$\Vert$ stopnja najnižjega monoma $\overset{*}{\Longrightarrow}$

Kaj to pomeni za tangente v sing. točki?

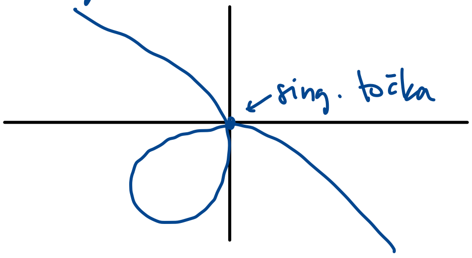
$\overset{*}{\Longrightarrow}$ Imamo dve tangenti, ki lahko sovpadata, ali pa tudi ne.

Def. sing. točka, v kateri imamo dve različni tangenti je vozel.
sing. točka, v kateri imamo eno dvojno tangento je ost.

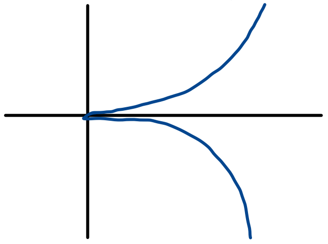
Primer nesingularne kubike z vozlom je Descartesov list.

$$x^3+y^3+3xyz=0$$

presek z ravnino z=1



Primer nesingularne kubike z ostjo je $y^2z=x^3$

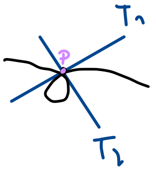


Opomba: To sta edini singularni nerazcepni kubiki (do proj. ekvivalence natančno)

Izrek 1: Vsaka nerazcepna kubika z vozlom je proj. ekvivalentna Descart. listu.

Izrek 2: Vsaka nerazcepna kubika z ostjo je proj. ekv $y^2z=x^3$

Dokaz 1: Naj bo $\mathcal{C}$ nerazcepna kubika z vozlom P.



Po lemi o 4 točkah obstaja taka proj. ekv., ki

$P \to [0:0:1]$

$T_1 \to x=0$

$T_2 \to y=0$

Kako se glasi enačba krivulje $\mathcal{C}$ v novih koordinatah?

Najprej dehomogeniziramo po z

$f = ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3+ex^2+fxy+gy^2+hx+iy+j$

$(0,0)$ leži na $\mathcal{C} \Rightarrow j=0$

$(0,0)$ je sing. točka $\Rightarrow h=i=0$

Tangenti v $(0,0)$ sta $x=0$ in $y=0 \Rightarrow g=0,\ e=0$

Homogeniziramo nazaj in dobimo

$F = ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3+fxyz$

$a\neq 0$ sicer $y|F$ (ne more delit ker F je nerazcepna)

$d\neq 0$ sicer $x|F$

$f\neq 0$ sicer F razpade na linearne faktorje

Nov koordinatni sis.: $\left.\begin{array}{l} x' = \sqrt[3]{a}\,x \\ y' = \sqrt[3]{d}\,y \\ z' = z \end{array}\right\} \Rightarrow a=d=f$

Ostane $F = x^3+bx^2y+cxy^2+y^3+fxyz = x^3+y^3+xy\underbrace{(bx+cy+fz)}_{3z}$

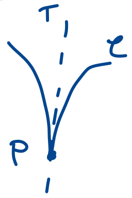
Proj. ekv. $x'=x$

$y'=y$

$z' = \frac{1}{3}(bx+cy+\overset{\overset{0}{\neq}}{f}z)$

nam to preslika v $x^3+y^3+3xyz=0$ $\square$

Dokaz 2: Naj bo $\mathcal{C}$ nerazcepna kubika z ostjo P.



Naj bo T dvojna tangenta v P.

Izberemo tako proj. ekv., da

$$P \longmapsto [0:0:1]$$
$$T \longmapsto y=0$$

Kakšna je enačba krivulje $\mathcal{C}$ v novih koordinatah?

Najprej dehomogeniziramo po z

$$f = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + \underbrace{ex^2 + fxy + gy^2}_{\overset{\shortparallel}{gy^2}} + hx + iy + j$$

$(0,0) \in \mathcal{C} \Rightarrow j=0$

$(0,0) \in \operatorname{Sing} \mathcal{C} \Rightarrow h=i=0$

$y=0$ dvojna tangenta $y \Rightarrow e=f=0$

Homogeniziramo nazaj in dobimo: $F = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + gy^2z$

Opazimo $a \neq 0$ (sicer $y | F$)

$g \neq 0$ (sicer F razpade na lin. faktorje)

$$\left.\begin{aligned} x' &= \sqrt[3]{a}\, x \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\underbrace{x^3 + bx^2y} + cxy^2 + dy^3 + gy^2z = 0 \\ &\left(x + \tfrac{b}{3}y\right)^3 = x^3 + bx^2y + 3\left(\tfrac{b}{3}\right)^2 xy^2 + \left(\tfrac{b}{3}\right)^3 y^3 \end{aligned}$$

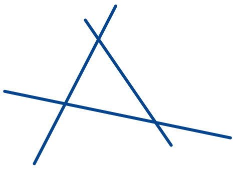
$$\left.\begin{aligned} x' &= x + \tfrac{b}{3}y \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}\right\} \text{odpade } bx^2y \qquad \begin{aligned} &x^3 + Cxy^2 + Dy^3 + Gy^2z = 0 \\ &x^3 + y^2(Cx + Dy + Gz) \end{aligned}$$

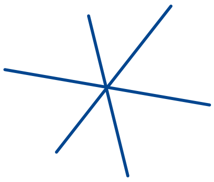
$$x' = x$$
$$y' = y'$$
$$z' = -(x - Dy - Gz)$$

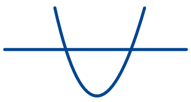
Premisli zakaj $\overset{g}{\overset{\shortparallel}{G}} \neq 0$

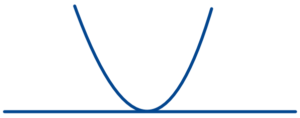
$$x^3 - y^2z = 0$$

S tem smo končali klasifikacijo nerazcepnih kubik do proj. ekv.

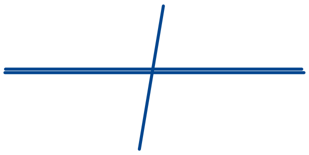








$(y+z)(xy+yz+zx)=0$



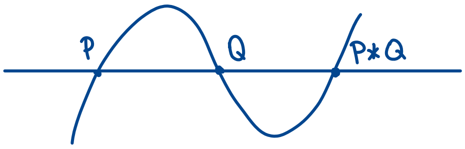
dvojna premica

trojna premica

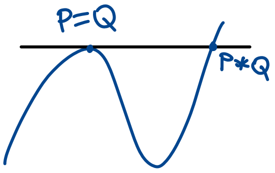
GRUPA KUBIKE

Naj bo $\mathcal{C}$ nerazcepna kubika. Na tej kubiki definiramo operacijo +, ki jo spremeni v grupo

Začnemo z pomočno operacijo $*$



če $P=Q$



če imamo $P=Q$, potegnemo tangento in prestavimo tja kjer x seka

Lastnost operacije $*$

- ·) $P, Q \in \mathrm{Reg}\,\mathcal{C} \Rightarrow P*Q \in \mathrm{Reg}\,\mathcal{C}$
- ·) $P*Q$ je $Q*P$
- ·) $(P*Q)*P = Q$
- ·) $((P*Q)*R)*S = P*((Q*S)*R)$ rabimo nek izrek k to dokazat zahteven dokaz

Pomni: $*$ ni asoc torej to ni grupa operacija

Izberemo na kubiki $\mathcal{C}$ fiksno točko $O \in \mathrm{Reg}\,\mathcal{C}$ (O = baza kubike $\mathcal{C}$)

Definiramo operacijo + na $\mathrm{Reg}\,\mathcal{C}$ takole:

$$P+Q=(P*Q)*\underset{\substack{\uparrow \\ \text{O kot oblak}}}{O}$$

Ta operacija je asociativna

$$(P+Q)+R=(((P+Q)*R)*O) = (((P*Q)*\overset{R}{\overset{\shortparallel}{O}})*\overset{S}{\overset{\shortparallel}{R}})*O$$

$$P+(Q+R)=P+((Q*R)*O) = (P*(\underset{\substack{\shortparallel \\ S}}{(Q*R)}*\underset{\substack{\shortparallel \\ R}}{O}))*O$$

oklepaja sta enaka po lastnosti

$((P*Q)*S)*R = P*((Q*S)*R)$

asoc. imamo ✓

še enota in inverz, komut. sledi iz komut. $*$

Kaj je enota? Enota za + je O

$$P+O=(P*O)*O=P$$

Kaj je inverz?

$$-P := P*(O*O)$$

$$P+(-P)=(P*(-P))*O = \underbrace{(P*(P*\underbrace{(O*O)}_{P}))}_{Q}*O = (O*O)*O = O \quad ✓$$

Opomba: Če izberemo bazo O drugače, dobimo drugo operacijo na $\mathrm{Reg}\,\mathcal{C}$. Kratek premislek pokaže, da sta ti dve operaciji izomorfni

$P+Q = (P*Q)*O$

$P+'Q = (P*Q)*O'$

Definiramo $\phi : \operatorname{Reg} \mathcal{C} \longrightarrow \operatorname{Reg} \mathcal{C}$ $\qquad$ ϕ .. izomorfizem

$\qquad P \longmapsto (O*O')*P$

Velja $\phi(P+Q) = \phi(P) +' \phi(Q)$

USTNI: 1 rez, Studyeva lema, rez 2 homogenih pol
2 prevoji / sing točke, presečna neenakost, ocena za št. prevojev
3 kubike , HNF , klasifikacija sing. nerazcepnih kubik

1 Def. rez, skupni faktor dveh polinomov
2 Def. prevoja + dokaz $C \cap H_e$ ...
3 singularne kubike

1 Rez dveh homogenih pol.
2 Prevoji (osnovna formula)
3 Weierstrassova forma